МГЗПИ

С. Л. ПЕВЗНЕР

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

МГЗПИ

С. Л. ПЕВЗНЕР

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие по курсу «Геометрия» для студентов-заочников II—III курсов физико-математических факультетов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1980

Рекомендовано Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Редактор МГЗПИ О.А. Павлович

Рецензенты:

доктор физико-математических наук *Г. Б. Гуревич*
доктор физико-математических наук *И. М. Яглом*
кандидат физико-математических наук *М. М. Цаленко*

П $\frac{60602 - 561}{103(03) - 80}$ заказное 4309020400

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое учебное пособие содержит материал по проективно геометрическим темам действующей программы курса геометрии педагогических институтов, а именно по разделам «Понятие проективного пространства» и «Основные факты проективной геометрии».

Изложение начинается с одномерной проективной геометрии. Это поможет читателю подготовиться к изучению основного материала двумерной геометрии. Такая дополнительная «ступенька», на мой взгляд, особенно полезна студенту-заочнику.

Преподавателю необходимо обратить внимание на применение проективных теорем к геометрии евклидовой плоскости, — это важный для будущего учителя аспект проективной геометрии. Этому вопросу в пособии уделено достаточное число пунктов и параграфов, названия которых заканчиваются словами «... на расширенной евклидовой плоскости». Студент должен четко представлять, например, что проективная теорема Дезарга распадается на много теорем евклидовой геометрии, что гармоническое деление — это обобщение деления пополам, что центр квадрики — это полюс несобственной прямой и т. д.

Книга состоит из шести глав. Главы разбиты на параграфы, параграфы — на пункты. Нумерация пунктов, формул и примеров сохраняется в пределах каждого параграфа.

Пособие представляет расширенный вариант одноименной брошюры автора (Проективная геометрия. М., 1975). В отличие от нее изложение здесь более полное, теоретический материал иллюстрируется большим количеством подробно решенных примеров.

Автор

ГЛАВА I.

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

§ 1. РАСШИРЕННАЯ ЕВКЛИДОВА ПРЯМАЯ. ПРОЕКТИВНАЯ ПРЯМАЯ

1. Перспективное отображение прямой в пучок. На евклидовой плоскости $\boldsymbol{R}_2$ возьмем пучок $\boldsymbol{S}$ прямых с центром S (множество прямых, проходящих через точку S) и прямую $\boldsymbol{R}_1$, не проходящую через центр пучка. Рассмотрим отображение ψ прямой $\boldsymbol{R}_1$ в пучок $\boldsymbol{S}$, при котором всякой точке $A \in \boldsymbol{R}_1$ соответствует прямая $SA \in \boldsymbol{S}$ (рис. 1), т. е. отображение ψ: $\boldsymbol{R}_1 \to \boldsymbol{S}$, определяемое условием $\psi(A) = (SA)$. Такое отображение называется *перспективным*.

Отображение ψ инъективно, так как из $A \neq B$ следует $\psi(A) \neq \psi(B)$. В то же время оно не сюръективно (не является отображением «на»), так как в пучке $\boldsymbol{S}$ есть прямая, не имеющая прообраза. Это прямая m, параллельная $\boldsymbol{R}_1$. Для того чтобы отображение ψ стало отображением «на», можно:

1) из пучка $\boldsymbol{S}$ удалить прямую m и рассматривать отображение $\boldsymbol{R}_1 \to (\boldsymbol{S} \setminus \{m\})$ или

2) к прямой $\boldsymbol{R}_1$ присоединить дополнительную точку, рассматриваемую как прообраз прямой m относительно перспективного отображения.

Мы пойдем по второму пути.

2. Расширенная евклидова прямая. Определение проективной прямой. К прямой $\boldsymbol{R}_1$ присоединим точку, которую обозначим через M_∞. Будем считать, что в этой точке прямая m пересекает параллельную ей прямую $\boldsymbol{R}_1$. Это позволит рассматривать прямую m как образ точки M_∞ при перспективном отображении.

Евклидову прямую, дополненную точкой M_∞, будем называть *расширенной евклидовой прямой* (и обозначать $\overline{\boldsymbol{R}}_1$), а точку M_∞ — *несобственной* или *бесконечно удаленной точкой* прямой $\boldsymbol{R}_1$.

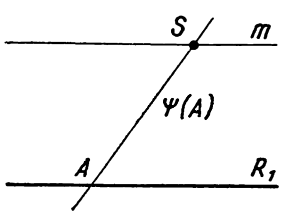

Рис. 1

Вместо отображения ψ: $\boldsymbol{R}_1 \to \boldsymbol{S}$ будем теперь рассматривать отображение $\bar{\psi}$: $\overline{\boldsymbol{R}}_1 \to \boldsymbol{S}$, которое на множестве собственных точек прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ (т. е. на прямой $\boldsymbol{R}_1$) действует как ψ, а несобственную точку отображает на прямую m:

$$\begin{cases} \bar{\psi}(A) = \psi(A) = (SA), \text{ если } A \neq M_\infty, \\ \bar{\psi}(M_\infty) = m. \end{cases}$$

Отображение $\bar{\psi}$, которое мы по-прежнему будем называть *перспективным*, является одновременно инъекцией и сюръекцией. Такие отображения называются *биективными* (или *взаимнооднозначными*).

В дальнейшем следует считать все точки прямой $\bar{\boldsymbol{R}}_1$ равноправными. С этой целью, пользуясь биективностью отображения $\bar{\psi}$: $\bar{\boldsymbol{R}}_1 \to \boldsymbol{S}$, мы можем вместо $\bar{\boldsymbol{R}}_1$ рассматривать пучок $\boldsymbol{S}$, назвав его проективной прямой, а прямые пучка — точками. Определение проективной прямой мы сформулируем в несколько более общем виде.

Определение. *Проективной прямой* называется множество $\boldsymbol{P}_1$, если существует биективное отображение g: $\boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S}$ — пучок прямых евклидовой плоскости; элементы множества $\boldsymbol{P}_1$ называются точками.

Теперь одни и те же факты могут быть выражены как на языке евклидовой, так и на языке проективной геометрии. При переводе с одного языка на другой удобно пользоваться следующей «словарной» таблицей:

Язык евклидовой геометрии	Язык проективной геометрии
Пучок прямых ($\boldsymbol{S}$)	Проективная прямая ($\boldsymbol{P}_1$)
Прямая пучка	Точка

Так как и отображение $\bar{\psi}$: $\bar{\boldsymbol{R}}_1 \to \boldsymbol{S}$ и тождественное отображение $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{S}$ биективны, то и расширенная евклидова прямая $\bar{\boldsymbol{R}}_1$ и пучок $\boldsymbol{S}$ являются проективными прямыми.

3. Порядок точек на проективной прямой. Порядок точек на евклидовой прямой характеризуется отношением «лежать между». На проективной прямой это отношение не имеет смысла, и вместо него вводится новое отношение — «разделенность пар точек».

В пучке $\boldsymbol{S}$ возьмем пару прямых A и B и рассмотрим два множества: а) множество, состоящее из прямых A и B и всех прямых пучка, расположенных внутри одной из пар вертикальных углов, образованных этими прямыми; б) множество, состоящее из прямых A и B и всех прямых, расположенных внутри другой пары вертикальных углов. На языке проективной геометрии эти множества называются *отрезками*, а прямые A и B — *концами отрезков*.

Таким образом, на проективной прямой имеются два отрезка с общими концами.

Определение. Пусть A, B, C, D — точки проективной прямой. Если точки C, D лежат на разных отрезках с концами A, B, то пара (C, D) называется *разделяющей* пару (A, B) (обозначение: $A, B \div C, D$), если на одном, то *неразделяющей* (обозначение: $A, B \doteq C, D$).

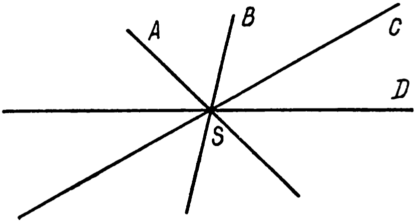

Рис. 2

Рис. 3

На рисунках 2 (пучок) и 3 (расширенная евклидова прямая) показаны следующие пары:

$$A, B \mathbin{\dot{-}} C, D; \;\; A, C \div B, D;$$

$$A, D \mathbin{\dot{-}} B, C.$$

Прямая пучка, непрерывно вращаясь в пучке, возвращается в исходное положение. Другими словами, точка проективной прямой может обойти всю прямую и вернуться в исходное положение. Это говорит о *замкнутости проективной прямой*. Отметим, однако, что замкнутость относится к числу так называемых топологических свойств линий. Точное определение этого понятия, как и само понятие линии, и, следовательно, строгое доказательство замкнутости какой-либо линии могут быть даны лишь в топологических терминах. Наши рассуждения носят наглядный характер и доказательством не являются.

§ 2. ПРОЕКТИВНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ НА ПРЯМОЙ

1. Определение проективной системы координат. Введем систему координат в пучке. Так как пучок — это проективная прямая, то тем самым будет решен вопрос об установлении системы координат на проективной прямой.

Рассмотрим на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ аффинную систему координат, начало которой совпадает с центром S пучка, а координатные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ произвольны, но не коллинеарны[1]. Всякая прямая X пучка может быть однозначно определена своим направляющим вектором $\vec{x}$ (рис. 4). Поэтому пара чисел (x_1, x_2) координат вектора $\vec{x}$ характеризует прямую пучка. Однако та же прямая может быть задана и любым другим направляющим вектором $\vec{x}'$. Оба направляющих вектора $\vec{x}$ и $\vec{x}'$ коллинеарны и, следовательно, связаны соотношением $\vec{x}' = k\vec{x}$ $(k \neq 0)$. Поэтому пара чисел $(k\vec{x}_1, k\vec{x}_2)$ — координат вектора $\vec{x}'$ — тоже характеризует прямую X.

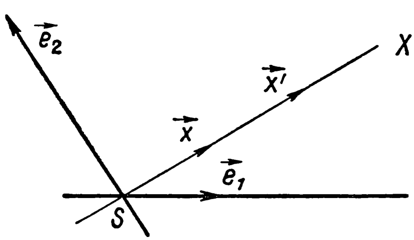

Рис. 4

Таким образом, пропорциональные (т. е. отличающиеся ненулевым множителем) пары чисел определяют одну и ту же прямую в пучке. Непропорциональные же пары определяют разные прямые, так как

[1] Для такой системы будет применяться обозначение $(S, \vec{e}_i)$.

векторы, соответствующие непропорциональным парам, не коллинеарны.

Отметим, что любая пара чисел, кроме нулевой, определяет некоторую прямую в пучке.

Во множестве ненулевых пар чисел пропорциональность является отношением эквивалентности. Поэтому множество ненулевых пар разбивается на классы эквивалентности по отношению пропорциональности.

Из сказанного ясно, что каждому классу пар соответствует единственная прямая в пучке и обратно — каждой прямой отвечает определенный класс пар. Поэтому класс пропорциональных пар можно считать координатой прямой. Тем самым на проективной прямой определяется *проективная* система координат, т. е. способ задания точек проективной прямой при помощи чисел.

Класс эквивалентности может быть задан одним представителем, поэтому для обозначения координаты прямой пучка можно использовать обычную запись: $X\ (x_1,\ x_2)$. Часто вместо запятой ставят двоеточие $X\ (x_1 : x_2)$, подчеркивая этим, что прямая пучка характеризуется не самими числами x_1, x_2, а их отношением. Иногда координату прямой пучка записывают в виде матрицы-столбца, элементами которой являются координаты одного из направляющих векторов прямой. При этом принято столбец обозначать той же буквой, что и прямую пучка:

$$X = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} \right\|.$$

Несмотря на некоторые неудобства, связанные с обозначением одной и той же буквой и прямой пучка и матрицы, такая запись имеет свои преимущества.

Мы будем допускать некоторую вольность речи, называя координатами прямой пучка элементы столбца X — числа x_1, x_2. Нестрогость такого словоупотребления связана с тем, что каждое из чисел x_1 и x_2 в отдельности не имеет геометрического смысла. Однако такая терминология широко распространена, и с этим нельзя не считаться.

2. Гомотетичные системы координат в пучке. Две аффинные системы координат с общим началом называются *гомотетичными*, если соответствующие координатные векторы обеих систем отличаются только множителем и притом одним и тем же.

Теорема. *Для того чтобы две системы аффинных координат, начало которых находится в центре пучка, определяли одну и ту же систему проективных координат, необходимо и достаточно, чтобы системы были гомотетичны.*

Доказательство. *Достаточность.* Пусть данные системы аффинных координат гомотетичны, т. е. существует такое число $h \neq 0$, при котором

$$\vec{e}_1{}' = h\vec{e}_1,\quad \vec{e}_2{}' = h\vec{e}_2, \tag{2.1}$$

где $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ и $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ — пары базисных векторов аффинных систем координат. Докажем, что направляющий вектор $\vec{x}$ произвольной прямой X

пучка имеет в данных системах пропорциональные координаты. Это будет означать, что в обеих системах произвольной прямой X отвечает один и тот же класс пропорциональных пар, т. е. обе системы устанавливают в пучке одну и ту же систему проективных координат.

Пусть вектор $\vec{x}$ в системе $(S, \vec{e}_i)$ имеет координаты (x_1, x_2), т. е.

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2.$$

В силу соотношений (2.1) получаем:

$$x = \frac{x_1}{h}\vec{e}_1{}' + \frac{x_2}{h}\vec{e}_2{}'.$$

Следовательно, в системе $(S, \vec{e}_i{}')$ вектор $\vec{x}$ имеет координаты $\left(\frac{x_1}{h}, \frac{x_2}{h}\right)$, которые, как видим, пропорциональны координатам вектора в системе $(S, \vec{e}_i)$.

Необходимость. Пусть теперь нам дано, что обе системы устанавливают в пучке одну и ту же систему проективных координат. Это означает, что координаты любого вектора, вычисленные в той и другой системах, пропорциональны.

В частности, вектор $\vec{e}_1{}'$, координаты которого в системе $(S, \vec{e}_i{}')$ образуют пару $(1, 0)$, в системе $(S, \vec{e}_i)$ имеет координаты $(h_1, 0)$, т. е. $\vec{e}_1{}' = h_1\vec{e}_1$. Аналогично $\vec{e}_2{}' = h_2\vec{e}_2$.

Теперь рассмотрим вектор

$$\vec{e}_1{}' + \vec{e}_2{}' = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2.$$

Его координаты в системе $(S, \vec{e}_i{}')$ образуют пару $(1, 1)$, в системе $(S, \vec{e}_i)$ — пару (h_1, h_2). По условию обе пары пропорциональны, и потому $h_1 = h_2$. Обозначая эти числа через h, приходим к формулам (2.1).

Теорема доказана.

3. Задание проективных координат при помощи прямых пучка. Мы ввели в пучке систему координат, названную проективной. Однако для ее задания используются векторы, не являющиеся элементами пучка. Необходимо найти способ задания проективных координат при помощи прямых пучка, т. е. внутренними относительно этого пучка средствами. Поставленную задачу решает следующая теорема, которую мы формулируем сразу на языке проективной геометрии.

Теорема. *Каковы бы ни были три различные точки E_1, E_2, E_0 проективной прямой, существует единственная система проективных координат, в которой эти точки имеют координаты*

$$E_1\,(1:0),\ E_2\,(0:1),\ E_0\,(1:1).$$

Доказательство проведем на языке евклидовой геометрии.

Существование. Пусть $\vec{e}_0$ — какой-либо направляющей вектор прямой E_0 пучка $\boldsymbol{S}$ (рис. 5). Разложив его на составляющие $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, коллинеарные прямым E_1 и E_2, получаем $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$.

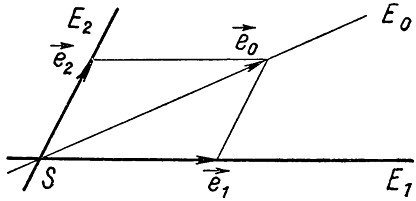

Рис. 5

Введем теперь в пучке $\boldsymbol{S}$ систему аффинных координат $(S, \vec{e}_i)$. В этой системе векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_0$ имеют координаты

$$\vec{e}_1 = (1, 0),\ \vec{e}_2 = (0, 1),\ \vec{e}_0 = (1, 1).$$

Следовательно, система $(S, \vec{e}_i)$ удовлетворяет условию теоремы.

Единственность. Пусть $(S, \vec{e}_i)$ и $(S, \vec{e}_i^{\,\prime})$ — две системы аффинных координат в пучке, определяющие в этом пучке проективные системы координат, удовлетворяющие условиям теоремы. Требуется доказать, что они определяют одну и ту же систему проективных координат. В соответствии с теоремой предыдущего пункта для этого достаточно доказать гомотетичность обеих систем.

Вектор $\vec{e}_1$ в системе $(S, \vec{e}_i)$ и вектор $\vec{e}_1^{\,\prime}$ в системе $(S, \vec{e}_i^{\,\prime})$ имеют координаты $(1, 0)$. По условию такие же координаты имеет и направляющий вектор прямой E_1. Следовательно, векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_1^{\,\prime}$ коллинеарны. Аналогично делаем вывод о коллинеарности векторов $\vec{e}_2$ и $\vec{e}_2^{\,\prime}$, $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ и $\vec{e}_0^{\,\prime} = \vec{e}_1^{\,\prime} + \vec{e}_2^{\,\prime}$. Так как $\vec{e}_1^{\,\prime} = h_1\vec{e}_1$, $\vec{e}_2^{\,\prime} = h_2\vec{e}_2$, $\vec{e}_0^{\,\prime} = h_0\vec{e}_0$, то

$$\vec{e}_0^{\,\prime} = h_0(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = h_1\vec{e}_1 + h_2\vec{e}_2$$

и, следовательно, $h_1 = h_2 = h_0$, что и доказывает гомотетичность систем координат.

Теорема доказана.

Итак, *проективная система координат однозначно определяется тройкой точек.* Эти точки называются *фундаментальными* точками системы координат. При этом E_1 и E_2, кроме того, называются *координатными*, а E_0 — *единичной.* Систему проективных координат R, определяемую фундаментальными точками E_1, E_2, E_0, будем обозначать $R(E_1, E_2, E_0)$ или, короче, $R(E_i)$.

4. Преобразование проективных координат. Найдем зависимость между координатами одной и той же точки проективной прямой в разных системах координат. Это удобно сделать в терминах, относящихся к пучку (на языке евклидовой геометрии).

Пусть $(S, \vec{e}_i)$ и $(S, \vec{e}_i^{\,\prime})$ — две системы аффинных координат и X — какая-либо прямая пучка $\boldsymbol{S}$. Обозначим через $\vec{x}$ один из направляющих векторов прямой X. Тогда, по определению, пара его координат является представителем класса пропорциональных пар — координаты прямой X. Как было условлено, обозначим той же буквой X столбец из координат вектора $\vec{x}$ в системе $(S, \vec{e}_i)$; столбец из координат того же вектора в системе $(S, \vec{e}'_i)$ обозначим через X'. Эти столбцы, как известно из теории линейных пространств, связаны соотношением

$$X' = PX,$$

где P — неособенная квадратная матрица второго порядка, задающая переход от пары векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ к паре векторов $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$, а именно:

$$P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}, \text{ если } \begin{cases} \vec{e}'_1 = p_{11}\vec{e}_1 + p_{21}\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = p_{12}\vec{e}_1 + p_{22}\vec{e}_2. \end{cases}$$

Так как столбцы X и X' можно заменить другими представителями, то они определены лишь с точностью до ненулевого множителя. Поэтому уравнение $X' = PX$ следует понимать не буквально, а лишь как утверждение пропорциональности столбцов X' и PX. Поскольку общепринятого знака пропорциональности нет, то *уравнение перехода от одной системы проективных координат к другой* в матричной форме будем записывать в следующем виде:

$$\lambda X' = PX \tag{2.2}$$

или (в подробной записи):

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \lambda x'_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2, \end{cases} \tag{2.3}$$

где λ — коэффициент пропорциональности (любое число, отличное от нуля) и

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix}, \quad X' = \begin{Vmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{Vmatrix}, \quad P = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{Vmatrix}.$$

Если заменить матрицу P на hP, где h — число, не равное нулю, то пара координатных векторов $\vec{e}'_1$, $\vec{e}'_2$ заменится на $h\vec{e}'_1$, $h\vec{e}'_2$. Такое изменение, согласно теореме о гомотетичных системах аффинных координат (см. п. 2), оставит проективную систему координат без изменения. Поэтому говорят, что матрица P в уравнении (2.2) определена *с точностью до множителя.*

Ясно также, что неособенность матрицы P — единственное ограничение, налагаемое на нее.

Уравнения перехода можно записать и в другом виде:

$$\mu X = QX', \tag{2.4}$$

где $\mu = \lambda^{-1}$, $Q = P^{-1}$, или (в подробной записи):

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x'_1 + q_{12}x'_2, \\ \mu x_2 = q_{21}x'_1 + q_{22}x^2_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

5. Проективные координаты на расширенной евклидовой прямой. Однородные аффинные координаты. Проективные координаты на расширенной евклидовой прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ следует понимать так. Пусть $\overline{\psi}$: $\overline{\boldsymbol{R}}_1 \to \boldsymbol{S}$ — перспективное отображение прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ на какой-либо пучок $\boldsymbol{S}$. Тогда проективной координатой точки, лежащей на прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$, будет проективная координата соответствующей прямой пучка. Если на прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ выбраны фундаментальные точки, то в соответствии с теоремой о задании проективных координат (см. п. 3) определена система координат, которая, следовательно, не зависит от выбора вспомогательного пучка $\boldsymbol{S}$.

На проективной прямой $\boldsymbol{P}_1$ все точки равноправны. На расширенной евклидовой прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ несобственная точка играет особую роль. Если эту точку принять за одну из фундаментальных точек проективной системы координат, то получится система проективных координат особого вида.

Определение. Проективная система координат $R\,(E_1, E_2, E_0)$ на расширенной евклидовой прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ называется *системой однородных аффинных координат*, если точка E_1 несобственная.

Обычная система аффинных координат на нерасширенной прямой $\boldsymbol{R}_1$ называется *неоднородной*. Она определяется двумя точками — началом координат O и точкой E, координата которой равна 1. Если $O = E_2$ и $E = E_0$, то система однородных координат на $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ и система неоднородных координат на $\boldsymbol{R}_1$ называются *соответствующими*.

Преимущество однородной системы координат перед неоднородной в том, что в однородной системе несобственная точка имеет определенные координаты. Из теоремы о задании проективных координат при помощи прямых пучка (см. п. 3) следует, что эти координаты равны $(1:0)$. Координаты собственных точек определяются следующей теоремой.

Теорема. *Собственная точка X прямой $\boldsymbol{R}_1$, имеющая неоднородную координату x, в соответствующей однородной системе имеет координату* $(x:1)$.

Доказательство. Пусть неоднородная система аффинных координат на прямой $\boldsymbol{R}_1$ задается точками O и E. Тогда соответствующая однородная система координат на $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ задается точками $E_{1\infty}$, $E_2 = O$, $E_0 = E$.

Приведем прямую $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ в перспективное соответствие с некоторым пучком $\boldsymbol{S}$, центр S которого выберем произвольно (рис. 6). В этом пучке определим систему координат $(S, \vec{e}_i)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_0 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ были направляющими для прямых $SE_{1\infty}$, SE_2, SE_0, положив

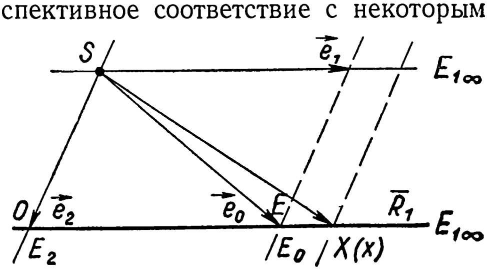

Рис. 6

$$\vec{e}_1 = \overrightarrow{E_2E_0},\ \vec{e}_2 = \overrightarrow{SE_2},\ \vec{e}_0 = \overrightarrow{SE_0}.$$

Тогда прямые SE_i, $i = 1, 2, 0$, в пучке и, следовательно, точки E_i, $i = 1, 2, 0$, на прямой будут иметь координаты $(1 : 0)$, $(0 : 1)$, $(1 : 1)$ соответственно. В связи с этим координаты произвольной точки $X \in \in \boldsymbol{R}_1$ будут равны координатам прямой SX в пучке, которые в свою очередь равны координатам направляющего вектора прямой. В качестве направляющего вектора прямой SX удобнее всего взять вектор $\overrightarrow{SX}$, имеющий координаты $(x, 1)$. Тогда координатой точки X будет пара $(x : 1)$.

Теорема доказана.

Пример 1. *Даны две системы проективных координат на прямой* $\boldsymbol{P}_1 : R = R(E_i)$ и $R' = R(E_i')$, *причем известны координаты точек* E_i', $i = 1, 2, 0$, *в системе* R:

$$E_1'(0 : 1),\ E_2'(1 : 2),\ E_0'(2 : -1).$$

Найдем уравнения перехода от одной системы к другой.

Решение. Уравнения перехода будем искать в виде (2.5):

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x_1' + q_{12}x_2', \\ \mu x_2 = q_{21}x_1' + q_{22}x_2'. \end{cases}$$

Нам известны координаты фундаментальных точек E_i' в двух координатных системах:

	E_1'	E_2'	E_0'
В системе R	$0 : 1$	$1 : 2$	$2 : -1$
В системе R'	$1 : 0$	$0 : 1$	$1 : 1$

Подставляя эти координаты в уравнения перехода, получаем шесть уравнений. При этом следует помнить, что коэффициент пропорциональности μ для каждой из трех точек имеет свое значение. Получаем:

$$\begin{cases} 0 = q_{11}, \\ \mu_1 = q_{21}; \end{cases} \quad \begin{cases} \mu_2 = q_{12}, \\ 2\mu_2 = q_{22}; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\mu_0 = q_{11} + q_{12}, \\ -\mu_0 = q_{21} + q_{22}. \end{cases}$$

Значения q_{ij} из первых четырех уравнений подставляем в последние два:

$$\begin{cases} 2\mu_0 = \mu_2, \\ -\mu_0 = \mu_1 + 2\mu_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\mu_1 = -5\mu_0$, $\mu_2 = 2\mu_0$, поэтому

$$q_{11} = 0,\ q_{12} = 2\mu_0,\ q_{21} = -5\mu_0,\ q_{22} = 4\mu_0.$$

Так как матрица Q определена с точностью до множителя, то, положив $\mu_0 = 1$, получим $q_{11} = 0$, $q_{12} = 2$, $q_{21} = -5$, $q_{22} = 4$. Уравнения перехода имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \mu x_1 = \qquad\qquad 2x'_2, \\ \mu x_2 = -5x'_1 + 4x'_2. \end{cases}$$

П р и м е р 2. *Даны координаты двух точек проективной прямой в координатных системах из предыдущего примера*: A $(1 : -1)$ *в системе* R' *и* B $(2 : 3)$ *в системе* R. *Найдем координаты точки* A *в системе* R *и точки* B *в системе* R'.

Р е ш е н и е. Воспользуемся уравнениями преобразования координат, найденными при решении предыдущего примера.

Для точки A получаем:

$$\begin{cases} \mu x_1 = 2 \cdot (-1) \qquad\qquad = -2, \\ \mu x_2 = -5 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -9. \end{cases}$$

Поэтому $x_1 : x_2 = 2 : 9$ и A $(2 : 9)$.

Для точки B имеем:

$$\begin{cases} 2\mu = 2x'_2, \\ 3\mu = -5x'_1 + 4x'_2, \end{cases}$$

откуда $x'_2 = \mu$, $x'_1 = \frac{1}{5}\mu$, т. е. $x'_1 : x'_2 = 1 : 5$ и, следовательно, B $(1 : 5)$.

П р и м е р 3. *На евклидовой прямой* $\boldsymbol{R}_1$ *даны своими неоднородными координатами точки* E_1 (-1), E_2 (4), E_0 (1), A (-2). *Найдем координаты точки* A *в проективной системе координат* R (E_i).

Р е ш е н и е. *Первый способ*. Данная неоднородная аффинная система координат на прямой $\boldsymbol{R}_1$ определяется точками O (0), E (1), а соответствующая ей однородная система R' — точками $E'_{1\infty}$, $E'_2 = O$, $E'_0 = E$. В системе R' данная точка A, согласно теореме из пункта 5, имеет координаты $(-2 : 1)$.

Так как нам известны координаты фундаментальных точек системы R (E_i), то можно найти формулы перехода от системы R (E_i) к системе R' (см. пример 1):

	E_1	E_2	E_0
В системе R (E_i)	$1 : 0$	$0 : 1$	$1 : 1$
В системе R'	$-1 : 1$	$4 : 1$	$1 : 1$

Зная формулы перехода, мы сможем найти координаты точки A в системе R (E_i) (см. пример 2). Найдите окончательное решение самостоятельно.

Второй способ. Рассмотрим перспективное отображение данной прямой $\boldsymbol{R}_1$ в какой-либо пучок $\boldsymbol{S}$ и введем в пучке систему координат $(S, \vec{e}_i)$, согласованную с системой R (E_i) на прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$. За координатные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ мы должны принять составляющие направляющего вектора прямой SE_0 (лучше всего взять вектор $\overrightarrow{SE_0}$), если его разложить по прямым SE_1, SE_2 (рис. 7). Для определения координат точки A теперь достаточно определить координаты направляющего вектора прямой SA, например вектора $\overrightarrow{SA}$, в системе $(S, \vec{e}_i)$.

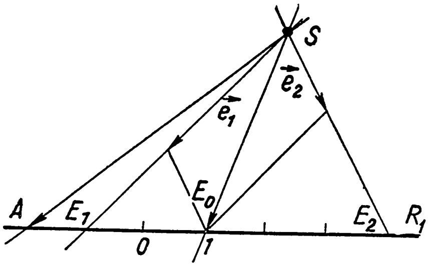

Рис. 7

Так как $|E_1E_0| : |E_0E_2|=2 : 3$, то

$$\overrightarrow{SE_1} = \frac{5}{3}\vec{e}_1,\ \overrightarrow{SE_2} = \frac{5}{2}\vec{e}_2,\ \overrightarrow{E_2E_1} = \frac{5}{3}\vec{e}_1 - \frac{5}{2}\vec{e}_2.$$

Поэтому

$$\overrightarrow{E_1A} = \frac{1}{5}\ \overrightarrow{E_2E_1} = \frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Следовательно,

$$\overrightarrow{SA} = \frac{5}{3}\vec{e}_1 + \left(\frac{1}{3}\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2\right) = 2\vec{e}_1 - \frac{1}{2}\vec{e}_2.$$

Итак, координаты вектора $\overrightarrow{SA}$ равны 2, $-\frac{1}{2}$. Это и есть координаты точки A в системе $R\ (E_i) : A\left(2 : -\frac{1}{2}\right)$ или $A\ (4 : -1)$.

§ 3. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ЧЕТЫРЕХ ТОЧЕК. ГАРМОНИЗМ

1. Определение двойных отношений. Если A и B — координатные столбцы двух различных точек проективной прямой, а C — координатный столбец какой-либо третьей точки той же прямой, то можно подобрать такие числа α и β, что будет выполняться равенство

$$C = \alpha A + \beta B.$$

В самом деле, если

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Vmatrix},\ B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Vmatrix},\ C = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Vmatrix},$$

то α и β находятся из системы:

$$\begin{cases} c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \end{cases}$$

определитель которой отличен от нуля, так как столбцы A и B как координатные столбцы различных точек не пропорциональны.

Определение. Пусть A, B, C, D — координатные столбцы четырех различных точек проективной прямой и α, β, α', β' — такие числа, что

$$C = \alpha A + \beta B,\ \ D = \alpha' A + \beta' B. \tag{3.1}$$

Тогда число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ называется *двойным* (или *сложным*) *отношением четырех точек* A, B, C, D. В принятых обозначениях запишем:

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}. \tag{3.2}$$

Таким образом, для фактического нахождения двойного отношения надо прежде всего выразить координатные столбцы точек второй пары C, D через координатные столбцы точек первой пары A, B.

Необходимо убедиться в корректности вышеприведенного определения, т. е. надо доказать, что:

1) двойное отношение зависит только от данных точек и не зависит от выбора системы координат;

2) в данной системе координат оно не зависит от выбора координатных столбцов из классов пропорциональных столбцов.

Корректность определения двойного отношения четырех точек вытекает из следующей теоремы.

Теорема. *Пусть A, B, C, D — четверка точек проективной прямой и A_1, B_1, C_1, D_1 — их произвольные координатные столбцы в одной проективной системе координат, а A_2, B_2, C_2, D_2 — в другой. Тогда если*

$$\begin{cases} C_1 = \alpha_1 A_1 + \beta_1 B_1, \\ D_1 = \alpha_1' A_1 + \beta_1' B_1; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_2 = \alpha_2 A_2 + \beta_2 B_2, \\ D_2 = \alpha_2' A_2 + \beta_2' B_2, \end{cases} \tag{3.3}$$

то $$\frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_1'}{\alpha_1'} = \frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_2'}{\alpha_2'}.$$

Доказательство. Согласно уравнению (2.2) координатные столбцы данных точек в разных системах связаны соотношениями

$$xA_2 = PA_1, \ yB_2 = PB_1, \ zC_2 = PC_1, \ tD_2 = PD_1,$$

где P — матрица перехода от одной системы к другой, а x, y, z, t — коэффициенты пропорциональности.

Умножая первые две из данных формул (3.3) слева на матрицу P, получаем:

$$zC_2 = \alpha_1 x A_2 + \beta_1 y B_2, \ tD_2 = \alpha_1' x A_2 + \beta_1' y B_2.$$

Сравнивая эти соотношения со второй парой данных формул, установим, что

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 x}{z}, \ \beta_2 = \frac{\beta_1 y}{z}, \ \alpha_2' = \frac{\alpha_1' x}{t}, \ \beta_2' = \frac{\beta_1 y}{t}.$$

Поэтому

$$\frac{\beta_2}{\alpha_2} : \frac{\beta_2'}{\alpha_2'} = \frac{\frac{\beta_1 y}{z}}{\frac{\alpha_1 x}{z}} : \frac{\frac{\beta_1' y}{t}}{\frac{\alpha_1' x}{t}} = \frac{\beta_1}{\alpha_1} : \frac{\beta_1'}{\alpha_1'},$$

что и требовалось доказать.

2. Двойное отношение четверок, содержащих совпавшие точки. В определении двойного отношения мы требовали, чтобы все четыре точки были различными. Требование несовпадения точек A и B было необходимо для того, чтобы были возможны соотношения (3.1). В силу несовпадения точек второй пары с точками первой пары все коэффициенты отличны от нуля, поэтому в формуле (3.2) нет деления на нуль.

В дальнейшем целесообразно это требование несколько ослабить. Для этого нам придется ко множеству действительных чисел присоединить новое число, которое будем обозначать символом ∞. Числу ∞ припишем следующие свойства:

$$\frac{m}{0} = \infty\ (m \neq 0); \quad \frac{m}{\infty} = 0\ (m \neq \infty); \quad m \cdot \infty = \infty\ (m \neq 0).$$

Теперь ограничимся требованием, чтобы лишь три точки A, B, C были различными; точка же D может совпадать с любой из них (заметим, что так как C не совпадает ни с A, ни с B, то $\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$ и $\frac{\beta}{\alpha} \neq \infty\Big)$:

1) $D = A$. В этом случае $\beta' = 0$, $\alpha' \neq 0$, поэтому $\frac{\beta'}{\alpha'} = 0$ и $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \infty$. Таким образом, $(ABCA) = \infty$.

2) $D = B$. Здесь аналогично получаем $(ABCB) = 0$.

3) $D = C$. В этом случае $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\beta'}{\alpha'}$ и, следовательно, $(ABCC) = 1$.

Ясно, что ни в каких других случаях двойное отношение четверки точек, в которой первые три точки различны, не может принимать значений ∞, 0, 1.

3. Существование и единственность точки, находящейся с данными тремя в данном двойном отношении. Выражение проективных координат через двойные отношения.

Теорема 1. *Пусть даны три различные точки A, B, C на проективной прямой и двойное отношение $(ABCD) = h$. Этими условиями точка D определяется однозначно.*

Доказательство. Если $h = \infty$ или $h = 0$, то, как показано в предыдущем пункте, положение точки D определено: она совпадает с A или с B. Поэтому полагаем $h \neq \infty$ и $h \neq 0$.

Обратимся к формулам (3.1): $C = \alpha A + \beta B$, $D = \alpha' A + \beta' B$. Здесь $\frac{\beta'}{\alpha'}$ — искомое, а $\frac{\beta}{\alpha}$ известно, причем $\frac{\beta}{\alpha} \neq \infty$ и $\frac{\beta}{\alpha} \neq 0$. Подставляя (формулы (3.2)) значение двойного отношения, находим неизвестное: $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\beta}{\alpha h}$. Теперь из второй формулы (3.1) находится с точностью до множителя координатный столбец точки D, что и определяет ее положение на прямой.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что двойное отношение может служить координатой точки на проективной прямой. Такая система координат задается тремя различными точками.

Мы, однако, будем пользоваться не этой, а введенной в § 2, п. 1 проективной системой координат, не требующей расширения понятия числа. Следующая теорема показывает, как проективные координаты связаны с двойными отношениями.

Теорема 2. *Пусть на проективной прямой задана система координат* $R(E_1, E_2, E_0)$ *и точка* $X(x_1 : x_2)$. *Тогда* $(E_1E_2E_0X) = x_1 : x_2$.

Доказательство. По условию

$$E_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad E_2 = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad E_0 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Vmatrix},$$

поэтому

$$\begin{cases} E_0 = E_1 + E_2, \\ X = x_1E_1 + x_2E_2 \end{cases}$$

и, следовательно, по определению (3.2)

$$(E_1E_2E_0X) = \frac{1}{1} : \frac{x_2}{x_1} = x_1 : x_2,$$

что и требовалось доказать.

4. Двойное отношение и порядок точек на прямой.

Теорема. *Для того чтобы пары точек A, B и C, D были разделенными (неразделенными), необходимо и достаточно, чтобы двойное отношение $(ABCD)$ было отрицательным (положительным).*

Символически условие этой теоремы может быть записано в следующем виде:

$$(ABCD) < 0 \Leftrightarrow A, B \div C, D,$$
$$(ABCD) > 0 \Leftrightarrow A, B \mathrel{\overset{\cdot\cdot}{-}} C, D.$$

Доказательство. Для проведения доказательства воспользуемся языком евклидовой геометрии. Как обычно, столбцы A, B, C, D — это координатные столбцы соответствующих прямых пучка (рис. 8). Они же являются координатными столбцами направляющих векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ данных прямых.

В пучке введем аффинную систему координат с координатными векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$ и разложим по этим векторам векторы $\vec{c}$, $\vec{d}$:

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \vec{d} = \alpha'\vec{a} + \beta'\vec{b}.$$

Ясно, что те же коэффициенты будут и в разложениях

$$C = \alpha A + \beta B, \quad D = \alpha' A + \beta' B.$$

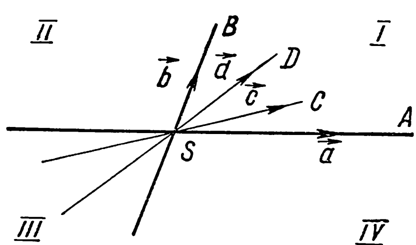

Рис. 8

Следовательно, по определению двойного отношения получим:

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

Если $\frac{\beta}{\alpha} > 0$ и $\frac{\beta'}{\alpha'} > 0$, то обе координаты вектора $\vec{c}$ будут одного знака; то же относится и к вектору $\vec{d}$. Это значит, что прямые C и D расположены в I и III четвертях.

Если $\frac{\beta}{\alpha} < 0$ и $\frac{\beta'}{\alpha'} < 0$, то прямые C и D находятся во II и IV четвертях.

И в том и в другом случае обе прямые C и D находятся в одной паре вертикальных углов, образованных прямыми A и B, т. е. точки C и D (на языке проективной геометрии) принадлежат одному и тому же из двух отрезков, образованных точками A и B. Следовательно, если $(ABCD) > 0$, то $A, B \doteq C, D$.

Аналогично показываем, что из $(ABCD) < 0$ следует $A, B \div C, D$.

Доказываемая теорема состоит из четырех отдельных утверждений. Мы доказали два из них, но ими определяется справедливость остальных, что легко доказывается способом от противного.

Теорема доказана.

5. Изменение двойного отношения при изменении порядка точек.

Т е о р е м а. *При изменении порядка точек в четверке двойное отношение меняется по следующим правилам.*

1) *При перестановке пар двойное отношение не меняется*:

$$(CDAB) = (ABCD);$$

2) *при перестановке точек одной пары двойное отношение меняется на обратное*:

$$(ABDC) = \frac{1}{(ABCD)};$$

3) *при перестановке крайних точек двойное отношение меняется на дополнительное к 1*:

$$(DBCA) = 1 - (ABCD).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По формулам (3.1)

$$C = \alpha A + \beta B,\ D = \alpha' A + \beta' B$$

и, следовательно,

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}.$$

1) Решив систему (3.1) относительно столбцов A и B, получим:

$$A = \frac{\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} C + \frac{\beta}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} D;\ B = \frac{\alpha'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'} C + \frac{\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta} D.$$

Отсюда:

$$(CDAB) = \frac{\dfrac{\beta}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}}{\dfrac{\beta'}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}} : \frac{\dfrac{\alpha}{\alpha\beta' - \alpha'\beta}}{\dfrac{\alpha'}{\alpha'\beta - \alpha\beta'}} = \frac{\beta}{\beta'} : \frac{\alpha}{\alpha'} = (ABCD).$$

2) Доказательство второй части теоремы тривиально:

$$(ABDC) = \frac{\beta'}{\alpha'} : \frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{(ABCD)}.$$

3) Решив систему (3.1) относительно столбцов C и A, получим:

$$C = \frac{\alpha}{\alpha'} D + \frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'} B; \quad A = \frac{1}{\alpha'} D - \frac{\beta'}{\alpha'} B.$$

Отсюда:

$$(DBCA) = \frac{\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha'}}{\frac{\alpha}{\alpha'}} : \frac{-\frac{\beta'}{\alpha'}}{\frac{1}{\alpha'}} = \frac{-\alpha'\beta + \alpha\beta'}{\alpha\beta'} = 1 - \frac{\alpha'\beta}{\alpha\beta'} = 1 - (ABCD).$$

Теорема доказана. Она, в частности, позволяет, зная двойное отношение четырех точек, взятых в каком-либо порядке, найти двойное отношение этих точек в другом порядке.

Примечание. В пункте 2 мы рассматривали двойное отношение таких четверок точек, в которых три первые точки были различны, а четвертая могла быть любой. Доказанная выше теорема позволяет еще более расширить понятие двойного отношения, ограничившись требованием, чтобы в четверке точек были различными три любые точки.

В соответствии с этой теоремой всегда можно добиться перестановки соответствующих точек на первые места, например,

$$(ABAC) = 1 - (CBAA) = 1 - 1 = 0 \text{ или } (ABAC) = \frac{1}{(ABCA)} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

Мы не останавливаемся на доказательстве корректности такого обобщения.

6. Гармонические четверки.

Определение. Четверка точек A, B, C, D, характеризующаяся условием $(ABCD) = -1$, называется *гармонической*.

Такие четверки играют в проективной геометрии очень важную роль и обладают рядом интересных свойств; некоторые из них мы отметим.

Свойство 1. *В гармонической четверке пары разделяют друг друга.* Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы пункта 4.

Свойство 2. *Гармонизм не нарушается при таких перестановках (в четверках), которые не меняют состава пар.*

В самом деле, в соответствии с теоремой пункта 5 при перестановке пар или элементов внутри пар двойное отношение или не изменяется совсем или меняется на обратное. И в том и в другом случае двойное отношение остается равным -1.

Из этого свойства следует, что если $(ABCD) = -1$, то $(BACD) = (ABDC) = (BADC) = (CDAB) = (DCAB) = (CDBA) = (DCBA) = -1$.

Пример 1. *На проективной прямой даны точки* $A\ (1 : -1)$, $B\ (-2 : 1)$, $C\ (1 : 3)$, $D\ (1 : 0)$. *Найдем двойное отношение* $(ABCD)$.

Решение. Для нахождения двойного отношения надо в соответствии с формулами (3.1) выразить линейно столбцы C и D через A и B, т. е. найти α, β, α', β' из соотношений

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \beta \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right\|; \quad \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \right\| = \alpha' \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \right\| + \beta' \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \end{matrix} \right\|.$$

Эти уравнения равносильны следующим:

$$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta, \\ 3 = -\alpha + \beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \alpha' - 2\beta', \\ 0 = -\alpha' + \beta', \end{cases}$$

откуда определяем $\alpha = -7$, $\beta = -4$, $\alpha' = -1$, $\beta' = -1$.

Подставляя эти значения в (3.2), находим:

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{-4}{-7} : \frac{-1}{-1} = \frac{4}{7}.$$

Пример 2. *Найдем $(DBAC)$, где A, B, C, D — точки из примера 1.*

Решение. *Первый способ.* Для определения $(DBAC)$ найдем коэффициенты в формулах

$$A = \delta D + \beta B,\ C = \delta' D + \beta' B.$$

Это можно сделать непосредственно (см. пример 1), а можно воспользоваться уже полученными соотношениями $C = -7A - 4B$, $D = -A - B$. Проведите необходимые вычисления самостоятельно.

Второй способ. Так как значение $(ABCD)$ известно, то для нахождения $(DBAC)$ можно воспользоваться теоремой об изменении двойного отношения при перестановке точек:

$$(DBAC) = \frac{1}{(DBCA)} = \frac{1}{1-(ABCD)} = \frac{1}{1-\frac{4}{7}} = \frac{7}{3}.$$

Пример 3. *Даны две системы проективных координат на прямой: $R = R(E_i)$ и $R' = R(E'_i)$, причем известны координаты точек E'_i, $i = 1, 2, 0$, в системе R : $E'_1\,(0:1)$, $E'_2\,(1:2)$, $E'_0\,(2:-1)$. Даны координаты точки $B\,(2:3)$ в системе R и точки $A\,(1:-1)$ в системе R'. Найдем координаты точки B в системе R' и точки A в системе R.* (Сравните с примерами 1 и 2 § 2).

Решение. Обозначим неизвестные координаты точки B в системе R' через $x'_1 : x'_2$. По теореме 2 пункта 3 имеем: $x'_1 : x'_2 = (E'_1E'_2E'_0B)$. Таким образом, дело свелось к нахождению двойного отношения четырех точек, координаты которых в системе R известны. Так как

$$E'_0 = -5E'_1 + 2E'_2,\ \ B = -E'_1 + 2E'_2,$$

то

$$(E'_1E'_2E'_0B) = \frac{2}{-5} : \frac{2}{-1} = \frac{1}{5}$$

и, следовательно, $B\,(1:5)$.

Нахождение координат точки A в системе R — обратная задача. По той же теореме

$$(E'_1E'_2E'_0A) = x'_1 : x'_2 = 1 : (-1) = -1.$$

Так как координатные столбцы точек E_i, A в системе R связаны следующими соотношениями

$$E'_0 = -5E'_1 + 2E'_2,\ \ A = \alpha' E'_1 + \beta' E'_2,$$

то

$$(E_1'E_2'E_0'A) = \frac{2}{-5} : \frac{\beta'}{\alpha'} = -1,$$

откуда $\frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{2}{5}$, и можно положить $\alpha' = 5$, $\beta' = 2$. Следовательно,

$$A = 5E_1' + 2E_2' = \begin{Vmatrix} 2 \\ 9 \end{Vmatrix},$$

т. е. в системе R будет A (2 : 9).

Пример 4. *Докажем тождество*

$$(KLAB) \cdot (KLBC) = (KLAC). \tag{3.4}$$

Решение. Положим:

$$A = \varkappa K + \lambda L,\ B = \varkappa' K + \lambda' L,\ C = \varkappa'' K + \lambda'' L.$$

Тогда

$$(KLAB) = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\lambda'}{\varkappa'},\ (KLBC) = \frac{\lambda'}{\varkappa'} : \frac{\lambda''}{\varkappa''},\ (KLAC) = \frac{\lambda}{\varkappa} : \frac{\lambda''}{\varkappa''}.$$

В справедливости формулы (3.4) убеждаемся теперь непосредственной подстановкой.

§ 4. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТОЧЕК НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПРЯМОЙ

1. Выражение двойного отношения через простые отношения.

Определение. *Простым отношением* (ABC) *трех точек* A, B, C евклидовой прямой называется отношение, в котором точка C делит направленный отрезок AB: $(ABC) = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}$. Напомним, что частным от деления вектора $\vec{a}$ на *коллинеарный* ему ненулевой вектор $\vec{b}$ называется число λ, удовлетворяющее соотношению $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Двойное отношение четырех точек расширенной евклидовой прямой может быть выражено через простые отношения. Следует помнить при этом, что понятие простого отношения чуждо проективной прямой. Поэтому те результаты, которые мы здесь получим, не потребуются при изучении проективной прямой, но зато позволят применять факты, касающиеся двойных отношений, к евклидовой геометрии.

Приведем расширенную прямую $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ в перспективное соответствие с некоторым пучком $\boldsymbol{S}$. Тогда за проективные координаты четырех собственных точек A, B, C, D прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$ можно принять столбцы из координат векторов $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{SB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{SC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{SD}$ (рис. 9) в некоторой аффинной системе $(S, \vec{e}_i)$.

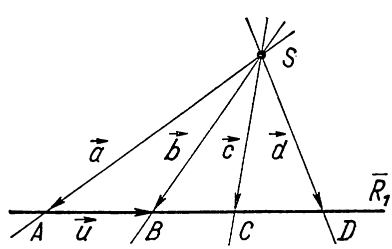

Рис. 9

Обозначим вектор $\overrightarrow{AB}$ через $\vec{u}$. Тогда найдутся такие числа γ и δ, что $\overrightarrow{AC} = \gamma\vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \delta\vec{u}$. Следовательно, $\vec{c} = \vec{a} + \gamma\vec{u}$, $\vec{d} = \vec{a} + \delta\vec{u}$. А так как $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$, то

$$\vec{c} = (1-\gamma)\vec{a} + \gamma\vec{b}, \quad \vec{d} = (1-\delta)\vec{a} + \delta\vec{b}.$$

Такие же соотношения выполняются и для координатных столбцов точек A, B, C, D в соответствующей проективной системе координат на прямой $\overline{\boldsymbol{R}}_1$:

$$C = (1-\gamma)A + \gamma B, \quad D = (1-\delta)A + \delta B.$$

Отсюда по формуле (3.2) запишем:

$$(ABCD) = \frac{\gamma}{1-\gamma} : \frac{\delta}{1-\delta}.$$

Но так как $\overrightarrow{AC} = \gamma\vec{u}$ и $\overrightarrow{CB} = (1-\gamma)\vec{u}$, то

$$\frac{\gamma}{1-\gamma} = \overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB} = (ABC).$$

Аналогично $\dfrac{\delta}{1-\delta} = (ABD)$. Поэтому

$$(ABCD) = (ABC) : (ABD) = (\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}) : (\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}). \qquad (4.1)$$

Итак, *двойное отношение четырех собственных точек расширенной евклидовой прямой есть отношение тех отношений, в которых точки второй пары делят отрезок, образованный точками первой пары.*

Именно это обстоятельство объясняет термины «двойное» или «сложное» отношение.

Пусть теперь одна из точек несобственная. В силу теоремы (§ 3, п. 5) о перестановке точек можно добиться, чтобы эта точка была последней в четверке. Итак, будем выражать через простые отношения двойное отношение $(ABCD_\infty)$ (рис. 10).

Как и ранее, $C = (1-\gamma)A + \gamma B$. За направляющий вектор прямой пучка $\boldsymbol{S}$, соответствующей в перспективном отображении точке D_∞, можно принять вектор $\vec{u} = \vec{b} - \vec{a}$, поэтому $D_\infty = -A + B$ и, следовательно,

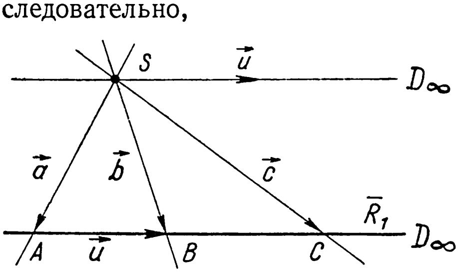

Рис. 10

$$(ABCD_\infty) = \frac{\gamma}{1-\gamma} : \frac{1}{-1} = -\frac{\gamma}{1-\gamma},$$

откуда:

$$(ABCD_\infty) = -(ABC) = -\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}. \qquad (4.2)$$

Итак, *двойное отношение четырех точек расширенной евкли-*

довой прямой, из которых первые три собственные, а четвертая несобственная, равно простому отношению первых трех точек, взятому с противоположным знаком.

2. Гармонические четверки точек на расширенной евклидовой прямой.

Теорема. *Для того чтобы четверка точек расширенной евклидовой прямой, содержащая одну несобственную и три собственных точки, была гармонической, необходимо и достаточно, чтобы точка, находящаяся в паре с несобственной, была серединой отрезка, образованного другой парой.*

Доказательство. *Необходимость.* Считаем, что в гармонической четверке несобственной является последняя точка; в противном случае эту точку можно переместить на четвертое место с помощью перестановок, не изменяющих состава пар и, следовательно, в силу свойства 2 (§ 3, п. 6) не нарушающих гармонизма.

Итак, $(ABCD_\infty) = -1$. Отсюда вследствие формулы (4.2) $(ABC) = -(-1)$ или $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$, что и требовалось доказать.

Достаточность. Пусть точка, находящаяся в одной паре с несобственной, делит пополам отрезок, образованный другой парой. Докажем, что данная четверка является гармонической. При этом надо рассмотреть четыре случая в зависимости от места несобственной точки в четверке.

Пусть, например, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BD}$ и точка A_∞ несобственная. Тогда по теореме § 3, п. 5 и формуле (4.2)

$$(A_\infty BCD) = (CDA_\infty B) = (DCBA_\infty) = -(DCB) = -\overrightarrow{DB}/\overrightarrow{BC} = -1,$$

т. е. данная четверка является гармонической. В трех других случаях доказательства аналогичны.

Теорема доказана.

Пример 1. *Найдем* $(ABCD)$, *если* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$.

Решение. По формуле (4.1) имеем:

$$(ABCD) = (ABC) : (ABD) = -2 : \left(\frac{-3}{2}\right) = \frac{4}{3}.$$

Пример 2. *Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине треугольника* ABC *пересекают прямую* AB *в точках* K *и* L *соответственно. Докажем, что четверка* A, B, K, L — *гармоническая* (рис. 11).

Решение. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника имеем: $|AK| : |KB| = \lambda$, где $\lambda = |AC| : |CB|$; так как векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KB}$ сонаправлены, то $(ABK) = \lambda$. Аналогично по свойству биссектрисы внешнего угла $(ABL) = -\lambda$. Поэтому

$$(ABKL) = \lambda : (-\lambda) = -1.$$

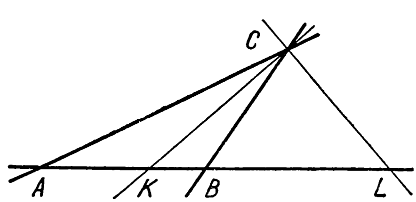

Рис. 11

ГЛАВА II.

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 5. РАСШИРЕННАЯ ЕВКЛИДОВА ПЛОСКОСТЬ. ПРОЕКТИВНАЯ ПЛОСКОСТЬ

1. Перспективное отображение плоскости в связку. В § 1, исходя из перспективного отображения множества точек евклидовой прямой в пучок прямых, мы пришли к понятиям расширенной евклидовой прямой и проективной прямой. Аналогичные рассуждения приводят к понятиям расширенной евклидовой плоскости и проективной плоскости.

В трехмерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}_3$ рассмотрим *связку* $\boldsymbol{S}$ прямых и плоскостей, т. е. множество всех прямых и плоскостей, проходящих через одну точку S, называемую *центром* связки.

Возьмем теперь плоскость $\boldsymbol{R}_2$, не проходящую через центр связки, и рассмотрим множество всех точек и прямых этой плоскости. Нас будет интересовать пока только одно отношение между точками и прямыми плоскости $\boldsymbol{R}_2$ — отношение инцидентности.

Точка и прямая (плоскость) называются *инцидентными*, если точка лежит на прямой (плоскости); прямая и плоскость называются *инцидентными*, если прямая лежит на плоскости. Обозначать инцидентность будем знаками принадлежности и включения: $A \in a$, $A \in \alpha$, $a \subset \alpha$; соответственно обозначается неинцидентность: $A \notin a$, $a \not\subset \alpha$. Отметим, что в некоторых случаях предпочтительней был бы какой-либо симметричный знак, ибо в проективной геометрии прямая — это самостоятельный объект, а не точечное множество.

Рассмотрим теперь отображение ψ: $\boldsymbol{R}_2 \to \boldsymbol{S}$, называемое *перспективным* и состоящее в том, что каждая точка $A \in \boldsymbol{R}_2$ отображается на прямую SA, а каждая прямая $a \subset \boldsymbol{R}_2$ — на плоскость (Sa), т. е. на плоскость, проходящую через S и a (рис. 12). Отображение ψ определяется, таким образом, условиями

$$\psi(A) = (SA), \ \psi(a) = (Sa).$$

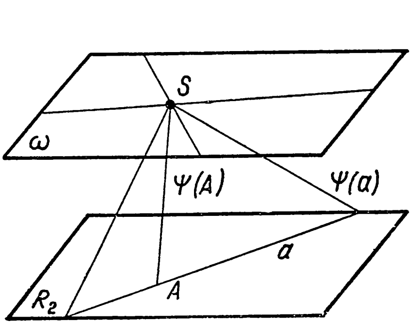

Рис. 12

Легко видеть, что отображение ψ инъективно. Но оно не является сюръекцией, так как плоскость $\omega \in S$, параллельная $\boldsymbol{R}_2$, не имеет в $\boldsymbol{R}_2$ прообраза. Не имеют прообразов и все прямые связки, расположенные в этой плоскости. Легко видеть, что все остальные прямые и плоскости связки имеют прообразы. В дальнейшем плоскость ω и расположенные в ней прямые будем называть *особыми*.

Основным свойством перспективного отображения ψ является сохранение (в обе стороны) инцидентности:

$$A \in a \Leftrightarrow \psi(A) \subset \psi(a). \tag{5.1}$$

2. Расширенная евклидова плоскость. С целью «исправить» перспективное отображение плоскости в связку так, чтобы оно стало биекцией, дополним плоскость $\boldsymbol{R}_2$ новыми элементами — прообразами особых прямых и особой плоскости.

Точки, которые добавляются к плоскости $\boldsymbol{R}_2$, будем называть *несобственными* или *бесконечно удаленными* точками плоскости и обозначать, например, A_∞. При этом каждой особой прямой связки ставится в соответствие одна и только одна несобственная точка, принимаемая за прообраз этой прямой.

Множество a_∞ всех несобственных точек называется *несобственно* или *бесконечно удаленной прямой*, и эта прямая принимается за прообраз особой плоскости связки.

Плоскость $\boldsymbol{R}_2$ с присоединенными к ней несобственными элементами будем называть *расширенной евклидовой плоскостью* и обозначать $\overline{\boldsymbol{R}}_2$. Перспективное отображение теперь можно считать действующим из расширенной плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ на связку $\boldsymbol{S}$, причем по определению несобственных элементов оно является *биективным*; для него будем употреблять обозначение $\overline{\psi}$.

Теперь вместо того чтобы сказать: «особая прямая связки параллельна плоскости $\boldsymbol{R}_2$», можно говорить: «особая прямая связки пересекает расширенную плоскость $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ в несобственной точке», а также вместо: «особая плоскость связки параллельна плоскости $\boldsymbol{R}_2$» можно сказать: «особая плоскость связки пересекает расширенную плоскость $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ по несобственной прямой».

3. Свойства несобственных элементов. Установим, какие свойства следует приписать несобственным элементам, чтобы перспективное отображение $\overline{\psi}$ сохраняло инцидентность всегда, а не только при воздействии на собственные элементы. Иными словами, потребуем, чтобы основное свойство (5.1) распространялось на всю расширенную плоскость:

$$A \in a \Leftrightarrow \psi(A) \subset \overline{\psi}(a). \tag{5.2}$$

Свойство 1. *На каждой собственной прямой расширенной евклидовой плоскости имеется несобственная точка и притом только одна.*

Доказательство. Пусть на плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ дана прямая l (рис. 13). Обозначим через m особую прямую связки, по которой пло-

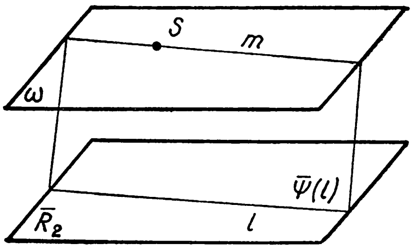

Рис. 13

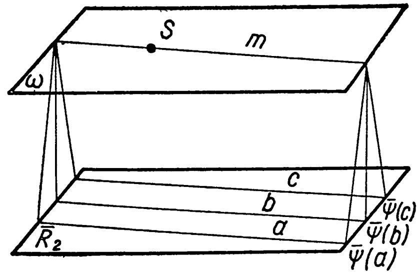

Рис. 14

скость $\bar\psi(l)$ пересекает особую плоскость ω. Прообраз этой прямой относительно отображения $\bar\psi$ обозначим через A_∞, следовательно, $\bar\psi(A_\infty) = m$. А так как прямая m лежит в плоскости $\bar\psi(l)$, то $\bar\psi(A_\infty) \subset \subset \bar\psi(l)$. Отсюда по свойству (5.2) $A_\infty \in l$.

Докажем теперь единственность несобственной точки на собственной прямой. Пусть A_∞, $B_\infty \in l$ — две точки. Тогда по свойству (5.2) $\bar\psi(A_\infty)$, $\bar\psi(B_\infty) \subset \bar\psi(l)$. Но прямые $\bar\varphi(A_\infty)$ и $\bar\psi(B_\infty)$ — особые, т. е. лежат в плоскости ω, поэтому каждая из них лежит в плоскостях $\bar\psi(l)$ и ω, следовательно, они совпадают:

$$\bar\psi(A_\infty) = \bar\psi(B_\infty).$$

Из биективности отображения $\bar\psi$ следует, что $A_\infty = B_\infty$.

Свойство 2. *Параллельные прямые расширенной евклидовой плоскости пересекаются в несобственной точке.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \subset \bar{R}_2$ — параллельные прямые (рис. 14), а A_∞, B_∞, C_∞ — их несобственные точки. Обозначим через m особую прямую, параллельную прямым a, b, c; по прямой m особая плоскость пересекается с плоскостями $\bar\psi(a)$, $\bar\psi(b)$, $\bar\psi(c)$. Обозначим через M_∞ прообраз прямой m; из $m = \bar\psi(M_\infty) \subset \bar\psi(a)$ по свойству (5.2) следует, что $M_\infty \in a$. Аналогично покажем, что $M_\infty \in b$, c. Таким образом, прямые a, b, c пересекаются в точке M_∞.

Доказанное свойство можно сформулировать и иначе:

Параллельные прямые на расширенной евклидовой плоскости образуют пучок с несобственным центром.

4. Простейшие теоремы об инцидентности на расширенной евклидовой плоскости. Пользуясь доказанными свойствами, мы можем оперировать несобственными элементами, не обращаясь к связке.

Прежде всего, рассмотрим вопрос о задании несобственных элементов на чертеже. Несобственная прямая a_∞ не нуждается в задании, так как она единственна. Несобственную точку M_∞ удобно задавать посредством собственной прямой m, на которой она расположена (рис. 15); этот способ задания основан на свойстве 1. Не следует только думать, что точка находится там, где стоит буква; всегда надо помнить, что $M_\infty = m \cap a_\infty$. В силу свойства 2 точка M_∞ может быть задана и при помощи любой из прямых m_1, m_2, ..., параллельных m.

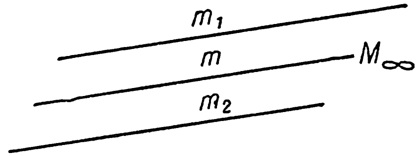

Рис. 15

Приведем теперь пример доказательства теоремы.

Теорема 1. *Существует единственная прямая, инцидентная двум произвольным точкам расширенной евклидовой плоскости.*

Доказательство распадается на три части.

1) Если обе данные точки собственные, то теорема верна в силу аксиом евклидовой геометрии.

2) Пусть одна из данных точек, точка A, собственная, а другая, B_∞, несобственная. Точку B_∞ зададим при помощи прямой b, $B_\infty \in b$. Тогда прямая AB_∞ должна проходить через A параллельно b. Существование и единственность такой прямой следует из аксиом евклидовой геометрии.

3) Если обе данные точки несобственные, то по определению через них проходит несобственная прямая и только она одна (свойство 1). Теорема доказана. Самостоятельно докажите следующую теорему.

Теорема 2. *Существует единственная точка, инцидентная двум произвольным прямым расширенной евклидовой плоскости.*

5. Определение проективной плоскости. Введенная нами расширенная плоскость обладает существенным неудобством: на ней имеются как собственные, так и несобственные точки и прямые. И хотя свойства собственных и несобственных элементов во многом сходны, мы их вынуждены различать. Так, например, именно этим была вызвана необходимость расчленения на три части доказательства теоремы 1 предыдущего пункта.

Чтобы «уравнять в правах» собственные и несобственные элементы, вводится понятие проективной плоскости. Для этого определение проективной плоскости должно базироваться не на понятии расширенной евклидовой плоскости, а на понятии связки.

Определение. Пусть $\boldsymbol{P}_2$ — множество, состоящее из элементов двух родов, называемых соответственно *точками* и *прямыми*, причем точки и прямые связаны отношением, называемым *инцидентностью* (для каждой данной точки и каждой данной прямой известно, инцидентны они или нет). Если существует биективное отображение $g: \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{S}$ — связка прямых и плоскостей, при котором каждая точка $A \in \boldsymbol{P}_2$ отображается на прямую связки, а каждая прямая $a \in \boldsymbol{P}_2$ — на плоскость связки и сохраняется (в обе стороны) инцидентность, то $\boldsymbol{P}_2$ называется *проективной плоскостью*.

Таким образом, одни и те же факты могут теперь быть выражены как на языке евклидовой геометрии, так и на языке проективной в соответствии со следующей словарной таблицей:

Язык евклидовой геометрии	Язык проективной геометрии
Связка прямых и плоскостей (S)	Проективная плоскость (P_2)
Прямая связки	Точка
Плоскость связки	Прямая
Инцидентность	Инцидентность

Отображение $\overline{\psi} : \overline{R}_2 \to S$ и тождественное отображение $S \to S$ биективны и сохраняют инцидентность. Поэтому расширенная евклидова плоскость $\overline{R}_2$ и связка S являются проективными плоскостями.

Так как при отображении $\overline{\psi}$ сохраняется инцидентность, то множество точек, инцидентных какой-либо прямой проективной плоскости, отображается на пучок прямых, лежащий в плоскости связки. Поэтому в силу определения, данного в § 1, п. 2, *прямая проективной плоскости, рассматриваемая как множество инцидентных ей точек, есть проективная прямая* P_1.

Целесообразность введения понятия проективной плоскости видна, например, из доказательства теоремы 1 предыдущего пункта, которую теперь следует сформулировать так.

Теорема. *Существует единственная прямая, инцидентная двум различным точкам проективной плоскости.*

Доказательство. В переводе на язык евклидовой геометрии теорема формулируется так: *существует единственная плоскость связки, инцидентная двум различным прямым связки.* Это утверждение вытекает из аксиом евклидовой геометрии.

Преимущество этого доказательства в том, что его не пришлось разбивать на отдельные части. При рассмотрении более сложных вопросов преимуществ значительно больше.

При изучении свойств проективной плоскости мы часто будем пользоваться (особенно при выполнении чертежей) ее частным случаем — расширенной евклидовой плоскостью. Однако при этом следует помнить о недостатках такого подхода. Неопытного читателя может ввести в заблуждение то обстоятельство, что на расширенной евклидовой плоскости точки и прямые связаны не только отношением инцидентности (а именно только оно по существу и является предметом изучения в проективной геометрии); они связаны и другими отношениями, такими, как параллельность прямых, конгруэнтность отрезков и т. п., которые в проективной геометрии не изучаются.

§ 6. ПРОЕКТИВНАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ

1. Определение и задание проективных координат. Преобразование координат. Проективные координаты на плоскости вводятся так же, как и на прямой. Считая, что читатель достаточно тщательно проработал § 2, где рассматривалась проективная система координат на прямой, мы остановимся кратко на основных фактах, относящихся к проективной системе координат на плоскости, и ряд утверждений приведем без доказательства.

Будем пользоваться евклидовой терминологией. Пусть имеется связка S с центром S и аффинная система координат $(S, \vec{e_i})$, где $i = 1, 2, 3$. Тогда любая прямая X связки может быть задана своим направляющим вектором $\vec{x}$, а этот последний — тройкой (x_1, x_2, x_3) своих координат в системе $(S, \vec{e_i})$. Класс пропорциональных троек с представителем (x_1, x_2, x_3) называется *проективной координатой прямой* X связки. Как и ранее, будут применяться следующие обозначения:

$$X(x_1 : x_2 : x_3),\ X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix}.$$

Теорема о том, что гомотетичные системы координат определяют в связке одну и ту же проективную систему координат (см. § 2, п. 2), имеет место и в данном случае. Ее доказательство предоставляем читателю.

С помощью этой теоремы доказывается теорема о задании проективных координат внутренними средствами, которая для плоскости формулируется следующим образом:

Теорема. *Каковы бы ни были четыре точки E_1, E_2, E_3, E_0 проективной плоскости, из которых никакие три не коллинеарны* (т. е. не лежат на одной прямой), *существует единственная система проективных координат, в которой эти точки имеют координаты*

$$E_1\,(1:\ 0:\ 0),\ E_2\,(0:\ 1:\ 0),\ E_3\,(0:\ 0:\ 1),\ E_0\,(1:\ 1:\ 1).$$

Доказательство этой теоремы по образцу теоремы § 2, п. 3 предоставляется выполнить читателю.

Таким образом, *система проективных координат на плоскости определяется четверкой точек, не коллинеарных по три*. Точки E_i, $i = 1, 2, 3, 0$, называются *фундаментальными точками* проективной системы координат, причем при $i = 1, 2, 3$ они, кроме того, называются *координатными*, а точка E_0 — *единичной*. Прямые E_2E_3, E_1E_3, E_1E_2 называются *координатными прямыми*.

И наконец, отметим, что формулы (2.2) и (2.4) преобразования проективных координат для случая плоскости в матричном виде записываются точно так же, только матрицы P и Q теперь невырожденные матрицы третьего порядка, а X и X' столбцы из трех элементов:

$$\lambda X' = PX, \tag{6.1}$$

$$\mu X = QX'. \tag{6.2}$$

Подробно формула (6.1) записывается в виде системы:

$$\begin{cases} \lambda x_1' = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3, \\ \lambda x_2' = p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3, \\ \lambda x_3' = p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3. \end{cases} \tag{6.3}$$

Аналогично можно записать и формулу (6.2).

Впервые проективные координаты на расширенной евклидовой плоскости под названием барицентрических координат ввел Мебиус[1], исходивший из оригинальных механических соображений. В наших терминах барицентрические координаты можно определить как специальный случай проективных, характеризующийся тем, что единичная точка E_0 находится в точке пересечения медиан координатного треугольника $E_1E_2E_3$. Мебиус и Плюккер[2] положили начало систематическому использованию аналитических методов в проективной геометрии.

2. Условие коллинеарности трех точек и уравнение прямой. Координаты прямой. Пусть в некоторой системе проективных координат даны координаты трех точек:

$$A = \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}, \quad C = \begin{Vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Vmatrix}.$$

(Напоминаем, что точки и их координатные столбцы мы условились обозначать одной буквой.) Векторы $\vec{a}\,(a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b}\,(b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c}\,(c_1, c_2, c_3)$ являются направляющими векторами соответствующих прямых связки. Поэтому *условие коллинеарности точек* A, B, C есть условие компланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.4}$$

Найдем *уравнение прямой*, проходящей через точки $A\,(a_1 : a_2 : a_3)$ и $B\,(b_1 : b_2 : b_3)$. Возьмем произвольную точку $X\,(x_1 : x_2 : x_3)$, лежащую на (AB). Уравнением прямой AB будет условие коллинеарности точек A, B, X:

$$\begin{vmatrix} x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \\ x_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{6.5}$$

или

$$x_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Заметим, что хотя бы один из коэффициентов последнего уравнения отличен от нуля. Это следует из непропорциональности столбцов A и B.

Мы видим, что уравнение всякой прямой линейно и однородно относительно текущих координат. Верно и обратное утверждение.

Теорема. *Всякое линейное однородное уравнение*

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0, \tag{6.6}$$

---

[1] Август Фердинанд Мебиус (1790—1868) — немецкий геометр.
[2] Юлиус Плюккер (1801—1868) — немецкий геометр и физик.

коэффициенты которого образуют ненулевую тройку (u_1, u_2, u_3), *есть уравнение некоторой прямой.*

Доказательство. Полагая для определенности $u_1 \neq 0$, возьмем две различные точки $A(-u_2 : u_1 : 0)$ и $B(-u_3 : 0 : u_1)$, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Находя по формуле (6.5) уравнение прямой AB, получаем данное уравнение (6.6).

Теорема доказана.

Определение. Класс пропорциональных ненулевых троек с представителем (u_1, u_2, u_3) называется *координатой прямой*, определяемой уравнением (6.6).

Нулевая тройка считается запрещенной, ей не отвечает никакая прямая.

Как и в случае точек, будем допускать некоторую вольность речи, называя числа u_1, u_2, u_3 координатами. Строку из координат условимся обозначать той же буквой, что и саму прямую: $u = \| u_1, u_2, u_3 \|$.

Уравнение прямой (6.6) будем иногда записывать в матричном виде:

$$uX = 0. \tag{6.7}$$

В силу равенства нулю определителя из формулы (6.5) его столбцы линейно зависимы. Так как точки A и B различны, то второй и третий столбцы независимы, и поэтому первый столбец можно представить как их линейную комбинацию:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = \alpha a_1 + \beta b_1, \\ x_2 = \alpha a_2 + \beta b_2, \\ x_3 = \alpha a_3 + \beta b_3. \end{cases} \tag{6.8}$$

Это — *параметрические уравнения прямой.* Они могут быть записаны и в матричной форме:

$$X = \alpha A + \beta B. \tag{6.9}$$

Каждой паре чисел (α, β) отвечает определенная точка прямой AB, причем пропорциональным парам и только им соответствует одна и та же точка, так как столбцы

$$X = \alpha A + \beta B \quad \text{и} \quad X' = \alpha' A + \beta' B$$

пропорциональны тогда и только тогда, когда пропорциональны пары (α, β) и (α', β').

3. Условие принадлежности трех прямых одному пучку. Найдем условие, при котором три прямые $l(l_1 : l_2 : l_3)$, $m(m_1 : m_2 : m_3)$, $n(n_1 : n_2 : n_3)$ проходят через одну точку (принадлежат одному пучку). Данные прямые имеют общую точку тогда и только тогда, когда система:

$$\begin{cases} l_1x_1 + l_2x_2 + l_3x_3 = 0, \\ m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 = 0, \\ n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = 0 \end{cases}$$

имеет ненулевое решение. Из алгебры известно, что это будет тогда, когда

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} = 0. \tag{6.10}$$

Это и есть *условие принадлежности трех прямых одному пучку*.

Условие того, что прямая u $(u_1 : u_2 : u_3)$ принадлежит пучку, определяемому прямыми l $(l_1 : l_2 : l_3)$ и m $(m_1 : m_2 : m_3)$, может быть записано так:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда следует, что строка u и есть линейная комбинация строк l и m

$$u = \lambda l + \mu m \tag{6.11}$$

или в подробной записи:

$$\begin{cases} u_1 = \lambda l_1 + \mu m_1, \\ u_2 = \lambda l_2 + \mu m_2, \\ u_3 = \lambda l_3 + \mu m_3. \end{cases} \tag{6.12}$$

Уравнения (6.11) и (6.12) называются *параметрическими уравнениями* пучка. Сравнивая их с параметрическими уравнениями прямой (6.8) и (6.9), обнаруживаем большое сходство, глубокие причины которого заключены в строении проективной плоскости и вскрываются в § 8, п. 1.

Пример 1. *Найдем уравнения координатных прямых.*

Решение. Согласно формуле (6.5) уравнение прямой E_2E_3 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 1 & 0 \\ x_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Подсчитывая определитель, получаем $x_1 = 0$. Аналогично находятся уравнения других координатных прямых: $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Пример 2. *Найдем точку пересечения прямых* u $(2 : -1 : 1)$ и v $(1 : 3 : -2)$.

Решение. Решая систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0, \end{cases}$$

составленную из уравнений данных прямых, находим:

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1 : 5 : 7.$$

Это и есть координаты точки пересечения.

Примечание. Здесь и далее использован известный способ решения систем линейных однородных независимых уравнений, в которых число неизвестных на единицу больше числа уравнений.

Пример 3. *Найдем точку пересечения прямой* $u\,(2 : -1 : 1)$ *с прямой, проходящей через точки* $A\,(2 : -1 : 0)$ *и* $B\,(3 : -3 : 1)$.

Решение. *Первый способ*. По формуле (6.5) находим уравнение прямой AB и решаем его совместно с уравнением прямой u. Проведение вычислений предоставляется читателю.

Второй способ. Решим ту же задачу при помощи параметрических уравнений прямой AB, которые согласно формуле (6.8) имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 = 2\alpha + 3\beta, \\ x_2 = -\alpha - 3\beta, \\ x_3 = \beta. \end{cases}$$

Определим, при каких значениях параметров α и β координаты текущей точки прямой AB удовлетворяют уравнению прямой u. Имеем:

$$2\,(2\alpha + 3\beta) - (-\alpha - 3\beta) + \beta = 0$$

или после упрощений: $\alpha + 2\beta = 0$. Можно положить $\alpha = 2$, $\beta = -1$ либо взять какие-либо другие, пропорциональные значения α и β. Из параметрических уравнений прямой AB при этих значениях параметров получаем $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Следовательно, искомая точка имеет координаты $(1 : 1 : -1)$.

Пример 4. *Даны четыре точки:* $A\,(5 : 1 : 0)$, $B\,(1 : 0 : 0)$, $C\,(2 : 3 : 1)$, $D\,(1 : -1 : 2)$. *Найдем координаты точки* $M = (AB) \cap (CD)$.

Решение. Обозначим координаты искомой точки M через $(x_1 : x_2 : x_3)$. Тогда из $M \in (AB)$ в силу (6.9) следует $M = \alpha A + \beta B$ или

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \alpha \begin{Vmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix} + \beta \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

откуда $x_3 = 0$.

Аналогично из $M \in (CD)$ следует $M = \gamma C + \delta D$ или

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \gamma \begin{Vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{Vmatrix} + \delta \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix}.$$

Чтобы в последнем уравнении получить $x_3 = 0$, положим $\gamma = 2$, $\delta = -1$. Получаем:

$$M = \begin{Vmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Пример 5. *Найдем уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых* $l\,(2:-1:1)$, $m\,(1:1:-1)$ *и точку* $A\,(2:-1:3)$.

Решение. Можно найти сначала координаты точки $B = l \cap \cap m$, а потом найти уравнение искомой прямой по двум известным точкам.

Мы решим задачу, пользуясь условием принадлежности трех прямых (l, m и искомой u) одному пучку. По формуле (6.11) $u = \lambda l + + \mu m$ или

$$\|u_1, u_2, u_3\| = \lambda\,\|2, -1, 1\| + \mu\,\|1, 1, -1\| = \\ = \|2\lambda + \mu, -\lambda + \mu, \lambda - \mu\|,$$

где $(u_1 : u_2 : u_3)$ — координаты искомой прямой u, уравнение которой теперь можно записать в следующем виде:

$$(2\lambda + \mu)x_1 + (-\lambda + \mu)x_2 + (\lambda - \mu)x_3 = 0.$$

Полученному уравнению удовлетворяют координаты точки A. Поэтому

$$(2\lambda + \mu)2 + (-\lambda + \mu)\cdot(-1) + (\lambda - \mu)\cdot 3 = 0,$$

откуда после упрощений получаем $4\lambda - \mu = 0$. Полагая $\lambda = 1$, $\mu = 4$, находим $u = \|6, 3, -3\|$. Сократив координаты на 3, получаем уравнение искомой прямой

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Пример 6. *Даны две системы проективных координат на плоскости* $\boldsymbol{P}_2$ — $R = R\,(E_i)$ *и* $R' = R\,(E_i')$, *причем известны координаты точек* E_i', $i = 1, 2, 3, 0$, *в системе* R: $E_1\,(1:1:1)$, $E_2\,(0:0:1)$, $E_3\,(-1:2:1)$, $E_0\,(0:3:1)$. *Найдем уравнения перехода от одной системы к другой.*

Решение. Уравнения перехода будем искать в виде системы, являющейся подробной записью матричного уравнения (6.2):

$$\begin{cases} \mu x_1 = q_{11}x_1' + q_{12}x_2' + q_{13}x_3', \\ \mu x_2 = q_{21}x_1' + q_{22}x_2' + q_{23}x_3', \\ \mu x_3 = q_{31}x_1' + q_{32}x_2' + q_{33}x_3'. \end{cases}$$

Найдем числа q_{ij} — элементы матрицы Q.

Нам известны координаты фундаментальных точек E_i' в двух координатных системах:

	E_1'	E_2'	E_3'	E_0'
В системе R	$1:1:1$	$0:0:1$	$-1:2:1$	$0:3:1$
В системе R'	$1:0:0$	$0:1:0$	$0:0:1$	$1:1:1$

Подставляя эти координаты в уравнения перехода, получаем двенадцать уравнений. При этом необходимо помнить, что коэффициент пропорциональности μ для каждой из четырех точек имеет свое значение. Получаем:

$$\begin{cases}\mu_1 = q_{11},\\ \mu_1 = q_{21},\\ \mu_1 = q_{31},\end{cases} \quad \begin{cases}0 = q_{12},\\ 0 = q_{22},\\ \mu_2 = q_{32},\end{cases} \quad \begin{cases}-\mu_3 = q_{13},\\ 2\mu_3 = q_{23},\\ \mu_3 = q_{33},\end{cases} \quad \begin{cases}0 = q_{11} + q_{12} + q_{13},\\ 3\mu_0 = q_{21} + q_{22} + q_{23},\\ \mu_0 = q_{31} + q_{32} + q_{33}.\end{cases}$$

Значения q_{ij} из первых девяти уравнений подставляем в последние три:

$$\begin{cases}0 = \mu_1 \qquad\quad - \mu_3,\\ 3\mu_0 = \mu_1 \qquad\quad + 2\mu_3,\\ \mu_0 = \mu_1 + \mu_2 + \mu_3.\end{cases}$$

Находим решение этой системы:

$$\mu_1 : \mu_2 : \mu_3 = \begin{vmatrix}0 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} : -\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = -3 : 3 : -3.$$

Полагая $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = -1$, $\mu_3 = 1$, получаем все элементы искомой матрицы:

$$Q = \begin{Vmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{Vmatrix}.$$

Уравнения перехода, следовательно, имеют вид:

$$\begin{cases}\mu x_1 = x_1' \qquad\quad - x_3',\\ \mu x_2 = x_1' \qquad\quad + 2x_3',\\ \mu x_3 = x_1' - x_2' + x_3'.\end{cases}$$

Решенный пример аналогичен примеру 1 из § 2.

Пример 7. *Точка A в системе R из предыдущего примера имеет координаты* $(1 : -1 : 0)$. *Найдем ее координаты в системе R'.*

Решение. Данные координаты подставляем в найденные выше уравнения, связывающие координаты точки в системах R и R':

$$\begin{cases}\mu = x_1' \qquad\quad - x_3',\\ -\mu = x_1' \qquad\quad + 2x_3',\\ 0 = x_1' - x_2' + x_3'.\end{cases}$$

Решая эту систему относительно $x_1' : x_2' : x_3'$, получаем:

$$x_1' : x_2' : x_3' = \begin{vmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix} : -\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix} = 1 : -1 : -2.$$

Это и есть координаты точки A в системе R'.

§ 7. ОДНОРОДНЫЕ АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Определение однородных аффинных координат. Так как расширенная евклидова плоскость $\boldsymbol{R}_2$ является проективной плоскостью, то все факты аналитической геометрии, установленные в § 6, имеют место и на расширенной евклидовой плоскости. Однако в связи с

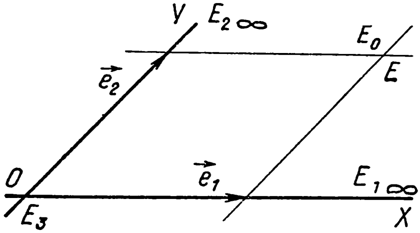

Рис. 16

особой ролью несобственных элементов появляются некоторые новые факты, которые представляют интерес в евклидовой геометрии, но теряют смысл в проективной. Для изучения этих вопросов удобно воспользоваться однородными аффинными координатами, являющимися естественным обобщением однородных аффинных координат на расширенной евклидовой прямой (см. § 2, п. 5) и частным случаем проективных координат.

Определение. Проективная система координат R (E_1, E_2, E_3, E_0) на расширенной евклидовой плоскости называется *системой однородных аффинных координат*, если координатные точки E_1, E_2 несобственные.

Обычная система аффинных координат на нерасширенной плоскости называется *неоднородной*. Она может быть задана осями и точкой E с координатами (1, 1), ибо при этих условиях легко находится начало координат и орты осей.

Определение. Система неоднородных аффинных координат на плоскости $\boldsymbol{R}_2$, заданная осями OX, OY и точкой E (1, 1), и система однородных аффинных координат на плоскости $\boldsymbol{R}_2$, заданная фундаментальными точками $E_{1\infty}$, $E_{2\infty}$, E_3, E_0 (рис. 16), называются *соответствующими* при следующих условиях:

$$O = E_3, \ (OX) = (E_3E_{1\infty}), \ (OY) = (E_3E_{2\infty}), \ E = E_0. \qquad (7.1)$$

Сразу заметим, что уравнение несобственной прямой в однородных аффинных координатах имеет вид $x_3 = 0$. Это следует из примера 1 (см. § 6), если учесть, что несобственная прямая является координатной прямой $E_{1\infty}E_{2\infty}$.

2. Связь однородных аффинных координат с неоднородными.

Теорема. *Собственная точка плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$, имеющая неоднородные координаты* (x, y), *в соответствующей однородной системе имеет координаты* ($x : y : 1$). *Несобственная точка плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$, определяемая прямой с направляющим вектором $\vec{c} = (a, b)$, в однородной системе имеет координаты* ($a : b : 0$).

Доказательство. Пусть неоднородная система координат на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ задана осями OX, OY и точкой E (1, 1). Тогда соответствующая однородная система на $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ согласно (7.1) задается несобственными точками $E_{1\infty}$, $E_{2\infty}$ осей OX, OY, точкой E_3 пересечения осей и точкой $E_0 = E$.

Приведем плоскость $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ в перспективное соответствие с некоторой связкой $\boldsymbol{S}$. В этой связке установим систему координат (S, $\vec{e}_i$), где $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — орты осей неоднородной системы координат и $\vec{e}_3 = \overrightarrow{SE_3}$ (рис. 17). Легко видеть, что при этом $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = \overrightarrow{SE_0}$, т. е. направляющий вектор $\overrightarrow{SE_0}$ прямой SE_0 имеет координаты (1, 1, 1).

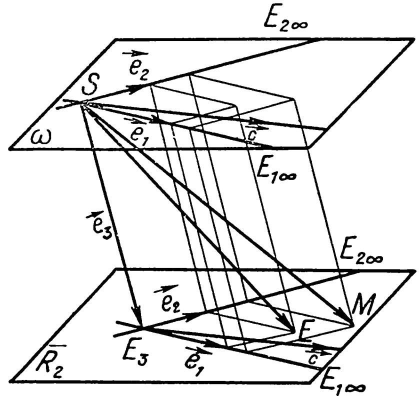

Рис. 17

Тогда прямые SE_i в связке и, следовательно, точки E_i, $i = 1, 2, 3, 0$, на плоскости будут иметь координаты соответственно $(1:0:0)$, $(0:1:0)$, $(0:0:1)$, $(1:1:1)$. Поэтому координаты произвольной точки $M \in \overline{R}_2$ будут равны координатам направляющего вектора прямой SM.

В случае, когда M — собственная точка, за направляющий вектор прямой SM можно взять вектор $\overrightarrow{SM}$, который в системе $(S, \vec{e_i})$ имеет координаты $(x, y, 1)$. Поэтому однородной координатой точки M будет класс троек с представителем $(x, y, 1)$.

Если точка M несобственная, то за направляющий вектор прямой SM можно взять вектор $\vec{c}$, который в системе $(S, \vec{e_i})$ имеет координаты $(a, b, 0)$, а определяемая им несобственная точка в однородной системе координат — $(a : b : 0)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Однородные аффинные координаты* $(x_1 : x_2 : x_3)$ *собственной точки связаны с ее неоднородными координатами* (x, y) *в соответствующей системе соотношениями*

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}. \tag{7.2}$$

В самом деле, по доказанной теореме тройки (x_1, x_2, x_3) и $(x, y, 1)$ принадлежат одному классу эквивалентности, т. е. пропорциональны, отсюда и вытекает соотношение (7.2). В этих формулах нет деления на нуль, так как для любой собственной точки $x_3 \neq 0$.

3. Прямые в однородных аффинных координатах. Уравнение прямой в неоднородных координатах имеет вид:

$$Ax + By + C = 0.$$

Ее направляющий вектор, как известно, имеет координаты $(B, -A)$. Следовательно, по теореме предыдущего пункта несобственная точка M_∞ данной прямой имеет координаты $(B : -A : 0)$.

В уравнении прямой перейдем к однородным координатам по формулам (7.2)

$$A\frac{x_1}{x_3} + B\frac{x_2}{x_3} + C = 0.$$

После умножения на x_3 получаем:

$$Ax_1 + Bx_2 + Cx_3 = 0.$$

Заметим, что последние два уравнения не эквивалентны: в первом из них x_3 не может равняться нулю, а во втором может, т. е. второму уравнению могут удовлетворять координаты несобственной точки. Легко видеть, что это будет как раз точка M_∞. Это значит, что переход от неоднородных аффинных координат к однородным приводит к присоединению к прямой ее несобственной точки.

Рассмотрим пример на использование однородных координат при выводе признака параллельности прямых.

Возьмем на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. Перейдем к однородным координатам (и одновременно к рассмотрению этих прямых на расширенной плоскости $\overline{\boldsymbol{R}_2}$):

$$A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = 0$$

и

$$A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = 0.$$

Эти прямые параллельны, если их несобственные точки $(B_1 : -A_1 : 0)$ и $(B_2 : -A_2 : 0)$ совпадают, что будет при условии

$$\frac{B_2}{B_1} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Мы пришли к известному *условию параллельности прямых.*

4. Кривые второго порядка в однородных аффинных координатах. Нам известны канонические уравнения невырожденных кривых второго порядка, принадлежащих разным аффинным классам, — эллипса, гиперболы и параболы:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y^2 = 2px.$$

Эти уравнения после перехода по формулам (7.2) к однородным координатам и умножения на x_3^2 принимают следующий вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = x_3^2, \quad x_2^2 = 2px_1x_3.$$

Кривые плоскости $\overline{\boldsymbol{R}_2}$, отвечающие последним уравнениям, могут отличаться от эллипса, гиперболы и параболы несобственными точками, однако мы сохраним для них прежние названия.

Выясним, как расположены эти кривые относительно несобственной прямой a_∞, для чего решим уравнение каждой кривой совместно с уравнением $x_3 = 0$.

В случае эллипса получается только нулевое решение $(0 : 0 : 0)$. Ему не соответствует никакая точка. Следовательно, *эллипс несобственных точек не имеет.*

В случае гиперболы получаются точки $K_\infty(a : b : 0)$ и $L_\infty(a : -b : 0)$. Первая из них лежит на асимптоте $x_2 = \frac{b}{a}x_1$, а вторая—на асимптоте $x_2 = -\frac{b}{a}x_1$. Значит, *гипербола имеет две несобственные точки — несобственные точки ее асимптот.*

В случае параболы обе точки пересечения совпадают в одной точке $M_\infty (1 : 0 : 0)$, которая лежит на оси параболы $x_2 = 0$. Таким образом, *парабола касается несобственной прямой в несобственной точке своей оси.*

Если условно изобразить несобственную прямую в виде собственной, то невырожденные кривые второго порядка будут выглядеть так, как это показано на рисунке 18.

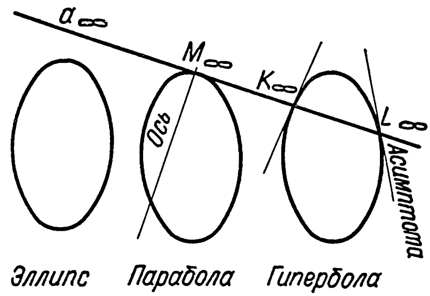

Рис. 18

Установленные закономерности могут быть использованы при изучении аффинных свойств кривых второго порядка (см. § 18, а также пример 2 настоящего параграфа).

Пример 1. *Найдем несобственную точку прямой*

$$2x + 3y - 2 = 0.$$

Решение. *Первый способ.* Направляющий вектор данной прямой имеет координаты $(3 : -2)$, поэтому по теореме пункта 2 искомая точка имеет координаты $(3 : -2 : 0)$.

Второй способ. Однородное уравнение $2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$ данной прямой решим совместно с уравнением несобственной прямой $x_3 = 0$. Этой системе удовлетворяет тройка $(3 : -2 : 0)$.

Пример 2. *Что можно сказать об аффинном классе кривой второго порядка*

$$x^2 + 4xy + 3y^2 + x - 1 = 0?$$

Решение. Однородное уравнение данной кривой

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + x_1x_3 - x_3^2 = 0$$

решаем совместно с уравнением несобственной прямой $x_3 = 0$. Получаем:

$$x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = 0$$

или

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + 4\frac{x_1}{x_2} + 3 = 0.$$

Решая это уравнение относительно $x_1 : x_2$, получаем два значения: $(x_1 : x_2)' = -1$, $(x_1 : x_2)'' = -3$. Таким образом, данная кривая имеет две несобственные точки $(-1 : 1 : 0)$ и $(-3 : 1 : 0)$. Следовательно, это либо гипербола, либо пара пересекающихся прямых.

Пример 3. *Точки* $E_1 (1, 0)$, $E_2 (1, 1)$, $E_3 (-2, 1)$, $E_0 (0, 0)$, *координаты которых даны в неоднородной аффинной системе координат, приняты за фундаментальные точки проективной системы координат R. Найдем координаты несобственной точки оси OY в системе R.*

Решение. Обозначим однородную систему координат, соответствующую данной аффинной, через R'. Нам известны координаты фундаментальных точек системы R в двух системах проективных координат:

	E_1	E_2	E_3	E_0
В системе R	$1:0:0$	$0:1:0$	$0:0:1$	$1:1:1$
В системе R'	$1:0:1$	$1:1:1$	$-2:1:1$	$0:0:1$

Пользуясь этими данными, можно найти уравнения перехода от одной системы к другой в виде (6.3). Поскольку задачи такого типа уже решались (см. § 2, пример 1; § 6, пример 7), мы предоставляем выполнение выкладок читателю. В процессе вычислений находятся уравнения, связывающие координаты $(x_1 : x_2 : x_3)$ какой-либо точки в системе R с координатами $(x_1' : x_2' : x_3')$ той же точки в системе R':

$$\begin{cases} \lambda x_1' = 3x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \lambda x_2' = \qquad - x_2 + x_3, \\ \lambda x_3' = 3x_1 - x_2 + x_3. \end{cases}$$

Так как направляющий вектор оси OY имеет координаты $(0, 1)$, то по теореме пункта 2 координаты несобственной точки оси OY в системе R' будут равны $(0 : 1 : 0)$. Подставляя их в уравнения перехода, получаем систему:

$$\begin{cases} 0 = 3x_1 - x_2 - 2x_3, \\ \lambda = \qquad - x_2 + x_3, \\ 0 = 3x_1 - x_2 + x_3. \end{cases}$$

Решая первое и третье уравнения совместно, находим $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 3 : 0$. Мы определили координаты несобственной точки оси OY в системе R.

П р и м е ч а н и е. При решении последней системы не было использовано второе уравнение. Ввиду произвольности коэффициента пропорциональности λ оно не содержит почти никакой информации о неизвестных x_1, x_2, x_3: из него следует лишь $x_2 \neq x_3$.

ГЛАВА III.

ПРОСТЕЙШИЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

§ 8. ПРИНЦИП ДВОЙСТВЕННОСТИ. ТЕОРЕМА ДЕЗАРГА

1. Принцип двойственности. Пусть дана проективная плоскость $\boldsymbol{P}_2$. Рассмотрим несколько необычное для начинающего читателя отображение f. Чтобы его определить, введем на $\boldsymbol{P}_2$ проективную систему координат и будем считать образом каждой точки A прямую a с теми же координатами, и наоборот:

$$f\colon\ A\ (a_1 : a_2 : a_3) \leftrightarrow a\ (a_1 : a_2 : a_3).$$

Так, например, образом прямой $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$ будет точка $(2 : -1 : 3)$.

Из определения отображения f ясно, что оно зависит от выбора системы координат и что таких отображений, следовательно, существует бесконечно много.

Поскольку плоскость $\boldsymbol{P}_2$ мыслится как совокупность принадлежащих ей точек и прямых, отображение f является отображением $\boldsymbol{P}_2$ на себя. Такого рода преобразования проективной плоскости называются *корреляциями*.

Отображение f обладает замечательным свойством — оно *сохраняет инцидентность*:

$$A \in b \Leftrightarrow f(A) \ni f(b).$$

В самом деле, условие инцидентности точки $A(a_1 : a_2 : a_3)$ и прямой $b\ (b_1 : b_2 : b_3)$ имеет вид:

$$b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 = 0.$$

Но точно так же записывается и условие инцидентности прямой $f(A)$ и точки $f(b)$.

Будем называть фигуры (здесь под фигурой подразумевается множество, состоящее из точек и прямых) *двойственными*, если одна из них может быть получена из другой посредством отображения f. Приведем примеры двойственных фигур.

1) *Точка и неинцидентная ей прямая.* В самом деле, примем данную точку за координатную точку E_1, а координатные точки E_2 и E_3 поместим на данной прямой. Тогда координаты данной точки и данной прямой одни и те же — $(1 : 0 : 0)$.

2) *Множество точек, лежащих на прямой, и пучок прямых, центр которого неинцидентен данной прямой.* Двойственность этих фигур вытекает из первого примера и сохранения инцидентности при отображении f.

3) *Фигурой, двойственной трехвершиннику*[1], *будет некоторый трехвершинник.* Если вершины данного трехвершинника принять за координатные точки, то видно, что трехвершинник двойствен самому себе.

Более полное определение двойственных фигур связано с общим понятием корреляции и здесь не рассматривается.

Из того, что отображение f сохраняет инцидентность точек и прямых, вытекает следующее замечательное свойство проективной плоскости:

Принцип двойственности. *Пусть верна какая-либо теорема, касающаяся точек и прямых проективной плоскости и отношения инцидентности между ними. Тогда будет верна и двойственная теорема, которая получается, если в данной теореме поменять местами слова «точка» и «прямая».*

В самом деле, всякая такая теорема есть утверждение о наличии определенных инцидентностей в некоторой фигуре, а двойственная теорема — о наличии соответствующих инцидентностей в двойственной фигуре.

Примерами двойственных теорем являются, например, теоремы § 5, п. 4; условие коллинеарности трех точек и условие принадлежности трех прямых одному пучку.

Принцип двойственности позволяет ограничиваться доказательством лишь одной из двух двойственных теорем. Вторая верна в силу этого принципа.

2. Теорема Дезарга[2]. *Пусть даны два трехвершинника, причем между их вершинами и, следовательно, сторонами установлено взаимно однозначное соответствие. Если при этом три прямые, инцидентные парам соответствующих вершин, инцидентны одной точке, то три точки, инцидентные парам соответствующих сторон, инцидентны одной прямой.*

Вершины данных трехвершинников обозначим через A, B, C и A_1, B_1, C_1 соответственно. Дальнейшие обозначения:

$$S = (AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1),$$

$$P = (BC) \cap (B_1C_1), \quad Q = (AC) \cap (A_1C_1), \quad R = (AB) \cap (A_1B_1).$$

Требуется доказать коллинеарность точек P, Q, R (рис. 19).

Доказательство. Введем проективную систему координат, приняв точки A, B, C, S за фундаментальные:

---

[1] *Трехвершинником* называется фигура, состоящая из трех неколлинеарных точек, называемых *вершинами*, и трех прямых, называемых *сторонами*, инцидентных парам этих точек.

[2] Жерар Дезарг (1593—1662) — французский архитектор и математик, один из основателей проективной геометрии.

$$A = \begin{Vmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Vmatrix},$$

$$C = \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad S = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

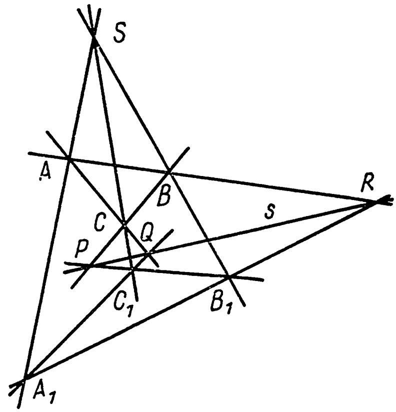

Рис. 19

Координатный столбец точки A_1 в силу (6.9) есть линейная комбинация столбцов A и S. Так как $A \neq A_1$ (в этом случае теорема тривиальна), то в выражении $A_1 = \alpha A + \sigma S$ можно положить $\sigma = 1$. Получаем тогда $A_1 = \alpha A + S$. То же самое относится и к другим вершинам трехвершинника $A_1B_1C_1$. Поэтому запишем:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} \alpha + 1 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad B_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ \beta + 1 \\ 1 \end{Vmatrix}, \quad C_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ \gamma + 1 \end{Vmatrix}.$$

Найдем теперь координаты точки P. Так как $P \in (BC)$, то верхний элемент в столбце P равен нулю. Но $P \in (B_1C_1)$, и потому $P = \beta_1 B_1 + \gamma_1 C_1$. Так как верхний элемент столбца P равен нулю, то $\beta_1 + \gamma_1 = 0$, или $\beta_1 = -\gamma_1$; положим $\beta_1 = 1$, $\gamma_1 = -1$. Тогда получаем $P = B_1 - C_1$ и аналогично $Q = C_1 - A_1$, $R = A_1 - B_1$. Следовательно,

$$P = \begin{Vmatrix} 0 \\ \beta \\ -\gamma \end{Vmatrix}, \quad Q = \begin{Vmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \gamma \end{Vmatrix}, \quad R = \begin{Vmatrix} \alpha \\ -\beta \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Остается с помощью условия коллинеарности трех точек убедиться, что точки P, Q, R лежат на одной прямой. Имеем:

$$\begin{vmatrix} 0 & -\alpha & \alpha \\ \beta & 0 & -\beta \\ -\gamma & \gamma & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Условие коллинеарности выполнено. Теорема доказана.

Примечание. При доказательстве теоремы можно воспользоваться тем, что

$$P + Q + R = (B_1 - C_1) + (C_1 - A_1) + (A_1 - B_1) = 0.$$

Принято называть трехвершинники, удовлетворяющие теореме Дезарга, *дезарговыми*, точку S — *дезарговой точкой*, прямую $s \ni P, Q, R$ — *дезарговой прямой*.

Фигура на рисунке 19, состоящая из десяти обозначенных точек и десяти показанных на чертеже прямых, называется *конфигурацией Дезарга*. Вообще же *конфигурацией* называется совокупность точек и прямых, в которой каждой прямой инцидентно одно и то же число точек, а каждой точке — одно и то же число прямых.

3. Обратная теорема Дезарга. Теперь выясним, что представляет собой теорема, двойственная теореме Дезарга. Для этого, как следует из принципа двойственности, надо в формулировке теоремы переставить слова «точка» и «прямая». При этом слово «трехвершинник» остается без изменения, но слово «вершина» меняется на слово «сторона», и наоборот.

Теорема. *Пусть даны два трехвершинника, причем между их сторонами и, следовательно, вершинами установлено взаимно однозначное соответствие. Если при этом три точки, инцидентные парам соответствующих сторон, инцидентны одной прямой, то три прямые, инцидентные парам соответствующих вершин, инцидентны одной точке.*

Двойственную теорему иллюстрирует тот же рисунок 19. Но теперь дано, что точки P, Q, R лежат на одной прямой, а утверждается, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку. Как видим, получилась обратная теорема Дезарга.

Совпадение двойственной и обратной теорем, имеющее место в данном случае, является обстоятельством случайным. Как правило, двойственная и обратная теоремы не совпадают (см., например, теоремы, на которые мы ссылались в конце пункта 1).

4. Теорема Дезарга на расширенной евклидовой плоскости. Поскольку некоторые элементы конфигурации Дезарга могут быть несобственными, то теорема Дезарга на плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ распадается на ряд частных случаев, каждый из которых с точки зрения геометрии нерасширенной плоскости представляет собой отдельную теорему. Формулировки и способы доказательства этих теорем средствами евклидовой геометрии подчас весьма несхожи.

Рассмотрим некоторые из частных случаев теоремы Дезарга, причем термин «трехвершинник», не принятый в евклидовой геометрии, применять не будем.

1. Прямая теорема Дезарга в случае, когда точка R конфигурации несобственная, а все остальные точки собственные, на языке геометрии евклидовой плоскости может быть сформулирована следующим образом:

Если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 принадлежат одному пучку, $(AB) \parallel (A_1B_1)$, прямые BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются, то точки $P = (BC) \cap (B_1C_1)$ и $Q = (AC) \cap \cap (A_1C_1)$ лежат на прямой, параллельной прямым AB и A_1B_1 (рис. 20).

2. Пусть теперь несобственной будет лишь дезаргова точка S (рис. 21). Чтобы получить евклидову формулировку прямой теоремы, надо изменить формулировку теоремы Дезарга, считая, что дана параллельность прямых AA_1, BB_1, CC_1 и непараллельность соответствующих сторон дезарговых треугольников.

Приводим также формулировку обратной теоремы:

Если два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ таковы, что прямые AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, AC и A_1C_1 пересекаются и притом точки пересечения лежат на одной прямой, и если, кроме того, $(AA_1) \parallel (BB_1)$, то прямая CC_1 параллельна прямым AA_1 и BB_1.

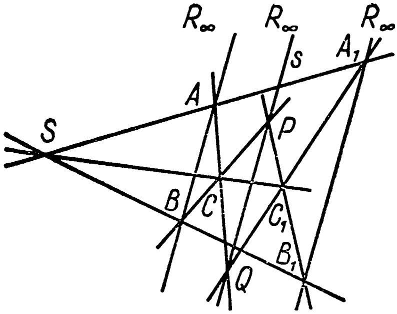

Рис. 20

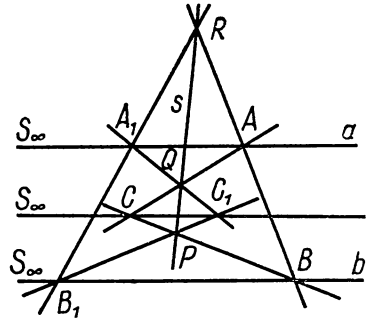

Рис. 21

На последней теореме основывается решение следующей задачи на построение:

Даны различные параллельные прямые a и b и неинцидентная им точка C. Требуется построить с помощью одной линейки прямую, проходящую через C параллельно a и b.

Решение. Возьмем произвольно точки A, A_1 на прямой a, B, B_1 на прямой b, требуя только, чтобы существовала точка $R=(AB)\cap(A_1B_1)$ (см. рис. 21). После этого через B_1 произвольно проводим прямую так, чтобы она пересекала прямую BC в точке, которую обозначим через P. Дальнейшие построения таковы: строим прямую $s = (PR)$, точку $Q = (AC) \cap s$, прямую QA_1 и точку $C_1 = (QA_1) \cap (PB_1)$. Прямая CC_1 — искомая.

§ 9. ДВОЙНОЕ ОТНОШЕНИЕ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

1. Определение двойного отношения четырех коллинеарных точек плоскости и его эквивалентность с прежним определением. В § 3, п. 1 было введено понятие двойного отношения четырех точек проективной прямой, которое определялось через координаты точек в некоторой системе проективных координат на прямой, хотя, как это было потом доказано, оно не зависит от выбора системы координат.

При изучении свойств проективной плоскости понятие двойного отношения весьма важно. В то же время определение § 3, п. 1 неудобно, поскольку в соответствии с ним всякий раз, когда требуется найти двойное отношение точек, необходимо вводить систему координат на прямой, на которой лежат эти точки. Желательно иметь выражение двойного отношения точек через их координаты в некоторой системе проективных координат *на плоскости*. С этой целью мы дадим новое определение двойных отношений и докажем, что оно равносильно прежнему.

Определение. Пусть A, B, C, D — координатные столбцы четырех различных коллинеарных точек проективной плоскости и α, β, α', β' — такие числа, что

$$C = \alpha A + \beta B,\ D = \alpha' A + \beta' B \tag{9.1}$$

(существование таких чисел гарантируется уравнением (6.9)). Тогда число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ называется *двойным отношением точек* A, B, C, D.

Прежде всего отметим, что это определение корректно в том смысле, что не зависит от выбора системы координат на плоскости. Это следует из теоремы, которая формулируется и доказывается дословно так же, как теорема § 3, п. 1, только теперь координатные столбцы точек содержат не два, а три элемента и квадратная матрица P — матрица не второго, а третьего порядка.

Теперь докажем, что *если искать двойное отношение четырех точек по определению § 3, п. 1 и по определению настоящего пункта, то получим одно и то же двойное отношение четырех точек.* Для этого достаточно убедиться в существовании таких систем координат на прямой и на плоскости, что коэффициенты α, β, α', β' в формулах (3.1) и (9.1) будут одинаковы.

Сначала выберем произвольно систему координат на прямой, на которой находятся данные точки. На языке евклидовой геометрии это значит, что в плоскости p связки, которой принадлежат прямые A, B, C, D связки, выбрана некоторая аффинная система координат $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Для выбора системы координат в связке возьмем произвольно еще один вектор $\vec{e}_3$ так, чтобы тройка $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ была независимой.

Тогда, если какой-либо вектор $\vec{a}$ плоскости p имеет в системе $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ координаты (a_1, a_2), то в системе $(S, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ его координаты будут равны $(a_1, a_2, 0)$. Поэтому в таких системах координат столбцы A, B, C, D в формулах (3.1) и (9.1) отличаются лишь нулевым элементом:

$$\left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \end{matrix} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\| + \beta \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \right\|, \qquad \left\| \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{matrix} \right\| + \beta \left\| \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

Следовательно, коэффициенты α, β, α', β' в обоих случаях одни и те же, а потому равны и двойные отношения.

2. Выражение проективных координат точек плоскости через двойные отношения.

Теорема. *Пусть $R\,(E_l)$, $l = 1, 2, 3, 0$ — система проективных координат на плоскости и M — точка с координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$. Обозначим через E_{k0} и M_k проекции точек E_0 и M из точки E_k на координатную прямую, проходящую через две другие координатные точки E_i и E_j. Тогда*

$$(E_i E_j E_{k0} M_k) = x_i : x_j. \tag{9.2}$$

Доказательство. Положим для определенности $k = 3$, $i = 1$, $j = 2$ (рис. 22). Требуется доказать равенство $(E_1 E_2 E_{30} M_3) = x_1 : x_2$.

Координаты точек E_1, E_2 известны, координаты точек E_{30}, M_3 легко находятся:

$$E_1 = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad E_2 = \left\| \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|,$$

$$E_{30} = \left\| \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix} \right\|, \quad M_3 = \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{matrix} \right\|.$$

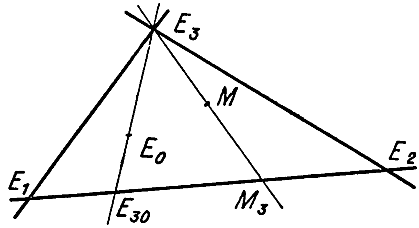

Рис. 22

Следовательно,

$$E_{30} = E_1 + E_2, \quad M_3 = x_1 E_1 + x_2 E_2.$$

Поэтому

$$(E_1 E_2 E_{30} M_3) = \frac{1}{1} : \frac{x_2}{x_1} = x_1 : x_2,$$

что и требовалось доказать.

Сравним эту теорему с теоремой 2, § 3, п. 3. Мы видим, что $(x_i : x_j)$ есть координата точки M_k на прямой $E_i E_j$ в системе $R\ (E_i,\ E_j,\ E_{k0})$, $\{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$.

3. Двойное отношение прямых пучка и расширенный принцип двойственности. Двойное отношение четырех прямых, принадлежащих одному пучку, определяется через координатные строки этих прямых (см. § 6, п. 2) так же, как и двойное отношение коллинеарных точек. При этом мы пользуемся формулой (6.11), согласно которой координатная строка какой-либо прямой пучка может быть выражена в виде линейной комбинации координатных строк двух различных прямых пучка.

Определение. Пусть a, b, c, d — координатные строки четырех различных прямых проективной плоскости, принадлежащих одному пучку, и α, β, α', β' — такие числа, что

$$c = \alpha a + \beta b, \quad d = \alpha' a + \beta' b. \tag{9.3}$$

Тогда число $\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'}$ называется *двойным отношением четырех прямых* и обозначается $(abcd)$.

Корректность определения будет доказана в пункте 5.

Введенное здесь понятие позволяет несколько усилить принцип двойственности, который был изложен в § 8, п. 1. С этой целью мы снова воспользуемся отображением f, которое каждую точку проективной плоскости переводит в прямую с теми же координатами, и наоборот. Так как оно сохраняет инцидентность, то четырем коллинеарным точкам A, B, C, D отвечают четыре прямые $a = f\,(A)$, $b = f\,(B)$, $c = f\,(C)$, $d = f\,(D)$, принадлежащие одному пучку.

Но столбцы A, B, C, D, с одной стороны, и строки a, b, c, d — с другой, состоят из одних и тех же элементов. Поэтому в формулах (9.1) и (9.3) будут одни и те же коэффициенты, и, следовательно, $(ABCD) = (abcd)$.

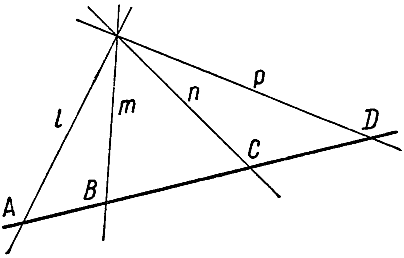

Рис. 23

Мы видим, что отображение f сохраняет двойное отношение. Это дает возможность расширить область применения принципа двойственности и сформулировать его так.

Пусть верна какая-либо теорема, касающаяся точек и прямых проективной плоскости, отношения инцидентности между ними и двойных отношений. Тогда будет верна и двойственная теорема, получающаяся из данной, если в ней поменять местами слова «точка» и «прямая».

4. Основное свойство двойных отношений.

Теорема. *Пусть четыре различные прямые l, m, n, p, принадлежащие одному пучку, соответственно инцидентны четырем точкам A, B, C, D, лежащим на прямой, не проходящей через центр пучка. Тогда*

$$(ABCD) = (lmnp). \tag{9.4}$$

Доказательство. По условию $A \in l$, $B \in m$, $C \in n$, $D \in p$ (рис. 23). Согласно равенству (6.7), условия инцидентности можно записать в следующем виде:

$$lA = mb = nC = pD = 0.$$

Вследствие принадлежности прямых одному пучку и коллинеарности точек имеем:

$$\begin{cases} n = \lambda l + \mu m, \\ p = \lambda' l + \mu' m, \end{cases} \qquad \begin{cases} C = \alpha A + \beta B, \\ D = \alpha' A + \beta' B. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в условия инцидентности, получаем:

$$\begin{cases} (\lambda l + \mu m)\ (\alpha A + \beta B) = 0, \\ (\lambda' l + \mu' m)(\alpha' A + \beta' B) = 0. \end{cases}$$

Раскрывая скобки и принимая во внимание два первых условия инцидентности, получаем:

$$\lambda\beta\ (lB) = -\mu\alpha\ (mA),$$
$$\lambda'\beta'\ (lB) = -\mu'\alpha'\ (mA).$$

Поделим эти равенства почленно. Числа lB и mA отличны от нуля, так как равенство их нулю означало бы, что $B \in l$ и $A \in m$, а это не соответствует условию. После сокращения находим:

$$\frac{\lambda\beta}{\lambda'\beta'} = \frac{\mu\alpha}{\mu'\alpha'},$$

что, как нетрудно видеть, равносильно равенству

$$\frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{\mu}{\lambda} : \frac{\mu'}{\lambda'}.$$

Теорема доказана.

5. Следствия из основного свойства двойных отношений. Из основного свойства вытекает корректность определения двойного отношения четырех прямых. В самом деле, пересечем четверку прямых l, m, n, p пучка какой-либо прямой, точки пересечения обозначим через A, B, C, D соответственно. Так как $(lmnp) = (ABCD)$, а $(ABCD)$, как известно, не зависит от выбора системы координат, то не зависит от координат и двойное отношение прямых, что и доказывает корректность определения.

Основное свойство позволяет также распространить на двойное отношение прямых пучка все те свойства и понятия, которые в § 3 были установлены для двойных отношений точек.

Отметим два следствия из теоремы предыдущего пункта.

Следствие 1. *Если четыре прямых пучка пересечены двумя прямыми, то на этих прямых получаются четверки точек, имеющих равные двойные отношения* (разумеется, порядок точек не произволен: на одних и тех же местах в четверках стоят точки, инцидентные одной и той же прямой пучка).

На рисунке 24 прямые пучка с центром P пересечены прямыми u и u_1. Точки пересечения обозначаются через A, B, C, D и A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Тогда $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$, так как каждое из этих двойных отношений по основному свойству равно двойному отношению прямых пучка.

Следствие 2. *Если через четыре коллинеарные точки проходят четыре прямые одного пучка и четыре прямые другого, то двойные отношения этих четверок равны.* (О порядке прямых в четверке — та же оговорка, что и в следствии 1.)

Доказывается так же, как и следствие 1. Кроме того, может быть получено из следствия 1 по принципу двойственности в его расширенной трактовке (см. п. 3).

6. Построение гармонических четверок на расширенной евклидовой плоскости. Приведем решения двух задач на построение четвертых гармонических элементов.

Задача 1. *Даны три прямые a, b, c пучка. Построим четвертую гармоническую* (т. е. такую прямую d, чтобы $(abcd) = -1$).

Решение. Через произвольную точку M прямой c проводим $(MA) \parallel b$ и $(MB) \parallel a$, причем $A \in a$, $B \in b$ (рис. 25). Затем проводим прямую AB. Прямая d, проходящая через центр пучка P параллельно (AB), искомая.

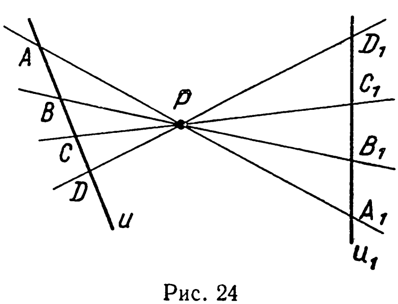

Рис. 24

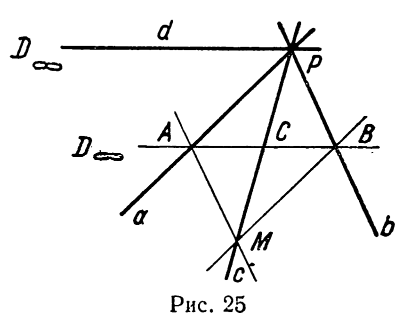

Рис. 25

В самом деле, если $C = (AB) \cap c$ и $D_\infty = (AB) \cap d$, то $(abcd) = (ABCD_\infty)$. Но C — середина отрезка AB, так как $AMBP$ — параллелограмм. Следовательно, по теореме § 4, п. 2 четверка A, B, C, D_∞ — гармоническая, что доказывает гармонизм четверки a, b, c, d.

Задача 2. *Даны три точки A, B, C на прямой m. Построим четвертую гармоническую точку D.*

Решение. Возьмем произвольную точку P, не лежащую на прямой m, и построим прямые PA, PB, PC. Как в первой задаче, строим к ним четвертую гармоническую, которая пересечет прямую в искомой точке D.

В следующем параграфе (пункт 3) будет рассмотрено построение гармонических четверок на проективной плоскости.

Пример 1. *Даны точки A $(1:-1:2)$, B $(-2:1:3)$, $C(1:0:-5)$, $D(-3:2:1)$. Докажем их коллинеарность и найдем двойное отношение $(ABCD)$.*

Решение. Убеждаясь непосредственным подсчетом в равенстве нулю определителей

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix},$$

устанавливаем в силу (6.4) коллинеарность троек A, B, C и A, B, D и, следовательно, всей четверки.

Теперь находим коэффициенты в формулах (9.1). Имеем:

$$\left\| \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{matrix} \right\| = \alpha \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \beta \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\|, \quad \left\| \begin{matrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \right\| = \alpha' \left\| \begin{matrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{matrix} \right\| + \beta' \left\| \begin{matrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \right\|,$$

откуда:

$$\begin{cases} 1 = \alpha - 2\beta, \\ 0 = -\alpha + \beta, \\ -5 = 2\alpha + 3\beta, \end{cases} \qquad \begin{cases} -3 = \alpha' - 2\beta', \\ 2 = -\alpha' + \beta', \\ 1 = 2\alpha' + 3\beta'. \end{cases}$$

Решая эти системы (они совместны в силу коллинеарности точек), получаем: $\alpha = \beta = -1$, $\alpha' = -1$, $\beta' = 1$ и далее

$$(ABCD) = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'} = \frac{-1}{-1} : \frac{1}{-1} = -1.$$

Пример 2. *Даны прямые a $(2:1:0)$, b $(0:1:3)$, c $(2:0:-3)$. Проверим, принадлежат ли эти прямые одному пучку, и найдем в пучке прямую d, такую, чтобы $(abcd) = -\frac{1}{3}$.*

Решение. Принадлежность прямых a, b, c одному пучку проверяется по условию (6.10).

По определению двойного отношения имеем:

$$-\frac{1}{3} = \frac{\beta}{\alpha} : \frac{\beta'}{\alpha'},$$

где α, β, α', β' — коэффициенты в формулах (9.3). По аналогии с предыдущим примером для нахождения α и β составляем систему:

$$\begin{cases} 2 = 2\alpha, \\ 0 = \alpha + \beta, \\ -3 = 3\beta, \end{cases}$$

откуда $\alpha = 1$, $\beta = -1$. Поэтому

$$-\frac{1}{3} = \frac{-1}{1} : \frac{\beta'}{\alpha'}$$

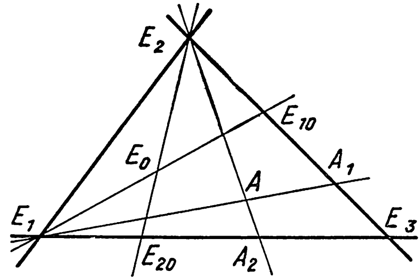

Рис. 26

и, следовательно, $\frac{\beta'}{\alpha'} = 3$. Полагая $\alpha' = 1$, $\beta' = 3$, из второго уравнения (9.3) имеем:

$$d = \|2,\ 1,\ 0\| + 3\,\|0,\ 1,\ 3\| = \|2,\ 4,\ 9\|.$$

Пример 3. *В некоторой системе проективных координат R' даны координаты фундаментальных точек системы R:*

$E_1\,(1 : 1 : 1)$, $E_2\,(0 : 0 : 1)$, $E_3\,(-1 : 2 : 1)$, $E_0\,(0 : 3 : 1)$.

Найдем координаты точки A в системе R, если в системе R' она имеет координаты $(1 : -1 : 0)$. (Ср. с примерами 6, 7, § 6.)

Решение. Задача решается на основании теоремы § 9, п. 2.

Находим координаты точек E_{10}, E_{20}, A_1, A_2 (рис. 26, обозначения на рисунке соответствуют обозначениям в условии теоремы). Точка E_{10} лежит на прямых E_2E_3 и E_1E_0, поэтому ее координаты $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ удовлетворяют уравнениям этих прямых:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 & 0 & -1 \\ \xi_2 & 0 & 2 \\ \xi_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \xi_1 & 1 & 0 \\ \xi_2 & 1 & 3 \\ \xi_3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Решая совместно эти уравнения, получаем координаты точки E_{10}. Аналогично находятся координаты других точек. Получаем:

$E_{10}\,(1 : -2 : 0)$, $E_{20}\,(0 : 3 : 2)$, $A_1\,(-2 : 4 : 1)$, $A_2\,(-3 : 3 : 1)$.

По теореме пункта 2 настоящего параграфа

$$x_1 : x_3 = (E_1E_3E_{20}A_2),\ x_2 : x_3 = (E_2E_3E_{10}A_1),$$

где $(x_1 : x_2 : x_3)$ — неизвестные координаты точки A в системе R. Прямым вычислением (как в примере 1) находим:

$$E_{20} = E_1 + E_3,\ A_2 = -E_1 + 2E_3$$

и

$$E_{10} = -E_2 + E_3,\ A_1 = -E_2 + 2E_3.$$

Поэтому

$$x_1 : x_3 = \frac{1}{1} : \frac{2}{-1} = -\frac{1}{2},\ x_2 : x_3 = \frac{1}{-1} : \frac{2}{-1} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : -1 : -2$. Мы нашли координаты точки A в системе R.

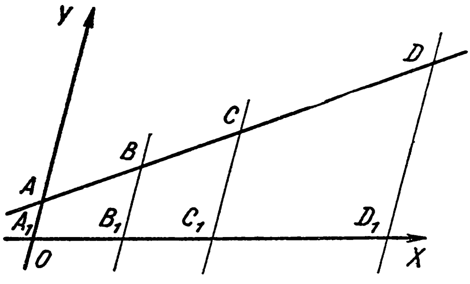

Рис. 27

Пример 4. *Даны четыре точки евклидовой плоскости своими неоднородными аффинными координатами: A (0, 2), B (1, 4), C (2, 6), D (4, 10). Убедимся в их коллинеарности и найдем $(ABCD)$.*

Решение. В коллинеарности точек можно убедиться, например, перейдя к однородным координатам и пользуясь условием коллинеарности (6.4). После этого двойное отношение можно найти тем же способом, который используется в примере 1. Мы рассмотрим иное решение.

Через данные точки проведем прямые, параллельные оси OY (рис. 27). Они пересекают ось OX в точках A_1 (0, 0), B_1 (1, 0), C_1 (2, 0), D_1 (4, 0) соответственно. По следствию 1 из основного свойства (пункт 5) и формуле (4.1)

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1) = (\overrightarrow{A_1C_1}/\overrightarrow{C_1B_1}) : (\overrightarrow{A_1D_1}/\overrightarrow{D_1B_1}).$$

Но $|A_1C_1| = 2$, $|C_1B_1| = 1$, $|A_1D_1| = 4$, $|D_1B_1| = 3$. Поэтому

$$(ABCD) = \frac{2}{-1} : \frac{4}{-3} = \frac{3}{2}.$$

Пример 5. *Прямые a, b, c, d, проходящие через начало координат, заданы следующими уравнениями: $y = 0$, $y = x$, $y = 3x$, $y = 5x$. Найдем $(abcd)$.*

Решение. Так как координаты данных прямых найти легко, то двойное отношение можно вычислить так же, как в примере 1. Приведем другое решение.

Пересечем данные прямые прямой $x = 1$, получив следующие точки пересечения A (1, 0), B (1, 1), C (1, 3), D (1, 5) (рис. 28). Тогда

$$(abcd) = (ABCD) = (\overrightarrow{AC}/\overrightarrow{CB}) : (\overrightarrow{AD}/\overrightarrow{DB}).$$

Но $|AC| = 3$, $|CB| = 2$, $|AD| = 5$, $|DB| = 4$. Поэтому

$$(abcd) = \frac{3}{-2} : \frac{5}{-4} = \frac{6}{5}.$$

§ 10. ПОЛНЫЙ ЧЕТЫРЕХВЕРШИННИК И ПОЛНЫЙ ЧЕТЫРЕХСТОРОННИК

1. Определения. *Полным четырехвершинником* (или полным четырехугольником) называется совокупность четырех точек, не коллинеарных по три, называемых *вершинами*, и шести инцидентных парам данных точек прямых, называемых *сторонами*. Стороны, не инцидентные одной и той же

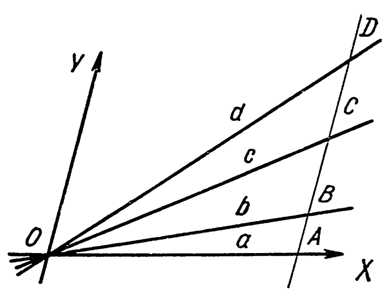

Рис. 28

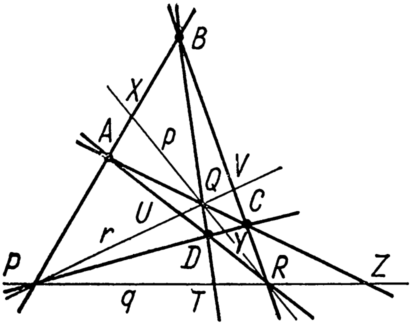

Рис. 29

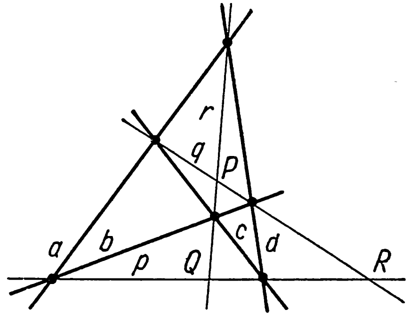

Рис. 30

вершине, называются *противоположными* (имеется три пары противоположных сторон). Три точки, инцидентные парам противоположных сторон, называются *диагональными*. Три прямые, инцидентные парам диагональных точек, называются *диагоналями*. Трехвершинник, образованный диагональными точками и диагоналями, называется *диагональным*.

На рисунке 29 A, B, C, D — вершины полного четырехвершинника; $P = (AB) \cap (CD)$, $Q = (AC) \cap (BD)$, $R = (AD) \cap (BC)$ — диагональные точки; p, q, r — диагонали; PQR — диагональный трехвершинник.

Фигура, двойственная полному четырехвершиннику, называется полным *четырехсторонником*. Полный четырехсторонник имеет четыре стороны и шесть вершин. На рисунке 30 a, b, c, d — стороны четырехсторонника, $a \cap b$ и $c \cap d$, $a \cap c$ и $b \cap d$, $a \cap d$ и $b \cap c$ — пары противоположных вершин; прямые p, q, r, инцидентные противоположным вершинам,— диагонали; точки их пересечения P, Q, R — диагональные точки.

2. Гармонические свойства полного четырехвершинника.

Теорема. 1) *На каждой стороне полного четырехвершинника имеется гармоническая четверка точек: одна пара точек этой четверки — вершины, другая — точки пересечения этой стороны с диагональным трехвершинником* (таких точек две, а не три, так как сторона проходит через вершину диагонального трехвершинника).

2) *На каждой диагонали полного четырехвершинника имеется гармоническая четверка точек: одна пара этой четверки — диагональные точки, другая — точки пересечения сторон, проходящих через третью диагональную точку, с данной диагональю.*

Дадим также не вполне строгую, но удобную формулировку теоремы: *все четверки точек на сторонах и диагоналях полного четырехвершинника, состоящие из разделенных пар, — гармонические.*

Доказательство. Введем дополнительные обозначения (см. рис. 29):

$$p \cap (AB) = X, p \cap (CD) = Y, q \cap (AC) = Z, q \cap (BD) = T,$$

$$r \cap (AD) = U, r \cap (BC) = V.$$

Требуется доказать гармонизм следующих девяти четверок точек:

(A, B, P, X); (D, C, P, Y); (A, C, Q, Z); (B, D, Q, T); (A, D, R, U);

(B, C, R, V); (Q, R, X, Y); (R, P, T, Z); (P, Q, U, V).

Сначала докажем гармонизм какой-либо одной четверки, например первой. С этой целью введем систему проективных координат с фундаментальными точками: $A\ (1:0:0)$, $B\ (0:1:0)$, $C\ (0:0:1)$, $D\ (1:1:1)$ — и определим координаты всех точек четверки (A, B, P, X).

Так как $P \in (AB)$, то третий элемент столбца P равен нулю. Поэтому из $P \in (CD)$ следует $P = D - C$. Проводя аналогичные рассуждения в отношении других диагональных точек, находим их координаты: $P\ (1:1:0)$, $Q\ (1:0:1)$, $R\ (0:1:1)$.

Теперь находим координаты точки X. Так как $P \in (AB)$, то третий элемент столбца X равен нулю. Поэтому из $X \in (QR)$ следует $X = Q - R$, откуда находим, что координаты точки X равны $(1:-1:0)$.

Следовательно,

$$P = A + B,\ X = A - B$$

и по определению двойных отношений

$$(ABPX) = \frac{1}{1} : \frac{-1}{1} = -1,$$

что и доказывает первую часть теоремы.

Гармонизм остальных восьми четверок точек доказывается аналогично. Проведите доказательство самостоятельно.

Примечание. Оставшаяся часть доказательства теоремы может быть проведена и на основании следствия 1 из основного свойства двойных отношений (§ 9, п. 5). С этой целью рассмотрим четверку прямых пучка, имеющего своим центром точку R. Прямые пучка пересечены прямыми AB, CD, PQ, поэтому на них образуются четверки с одним и тем же двойным отношением: $(ABPX) = (DCPY) = (UVPQ)$. А так как гармонизм первой четверки доказан, то доказаны еще две части теоремы.

Рассмотрев пучок с центром Q, получим $(ABPX) = (ZTPR)$.

И так далее.

Согласно принципу двойственности в его расширенной трактовке (§ 9, п. 3) верна и двойственная теорема — теорема о гармонических свойствах полного четырехсторонника. Сформулируйте ее самостоятельно. Эта теорема не представляет большого интереса, так как является простым следствием из теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника.

3. Построение четвертой гармонической. В § 9, п. 6 уже рассматривалось построение гармонических четверок точек и прямых на расширенной евклидовой плоскости. Теорема предыдущего пункта о гармонических свойствах полного четырехвершинника позволяет выполнять эти построения на произвольной проективной плоскости, причем с помощью одной линейки (*линейкой*, как известно, называется инструмент, которым можно построить прямую, инцидентную двум любым точкам).

Итак, *к трем данным точкам* A, B, C *на прямой нужно построить четвертую гармоническую точку* D, т. е. такую точку, чтобы четверка (A, B, C, D) была гармонической.

Первый способ. Будем строить полный четырехвершинник, в котором данная прямая — диагональ, точки A и B — диагональные, а C — точка пересечения стороны с диагональю AB. С этой целью произвольно возьмем три стороны четырехвершинника, две из которых инцидентны точке A, а третья — точке C. Точки пересечения первых двух сторон с третьей, обозначенные на рисунке 31 через X и Y, являются вершинами четырехвершинника. Далее находим остальные вершины: $Z = (BX) \cap (AY)$ и $T = (BY) \cap (AX)$, а потом строим искомую точку $D = (TZ) \cap (AB)$.

Второй способ. Примем данную прямую за сторону, точки A и B — за вершины, точку C — за диагональную точку полного четырехвершинника (см. рис. 31). Через C проведем произвольно сторону, не совпадающую с (AB), и на ней произвольно возьмем две точки X и Y, которые примем за вершины полного четырехвершинника $ABXY$. Теперь строим оставшиеся диагональные точки: $T = (AX) \cap (BY)$, $Z = (BX) \cap (AY)$ — и проводим через них диагональ TZ. Точка пересечения этой диагонали с данной прямой есть искомая точка D.

Двойственное построение четвертой гармонической прямой в пучке предоставляется выполнить читателю. Кроме того, заметим, что оно может быть осуществлено в силу основного свойства двойных отношений (§ 9, п. 4).

4. Гармонические свойства некоторых четырехвершинников на расширенной евклидовой плоскости. Представляет интерес рассмотрение частных случаев теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника на расширенной евклидовой плоскости, которые возникают, если некоторые элементы полного четырехвершинника являются несобственными.

1. Пусть несобственными являются две диагональные точки P_∞ и R_∞. В этом случае четырехвершинник имеет две пары параллельных противоположных сторон (рис. 32), а диагональю $P_\infty R_\infty$ является не-

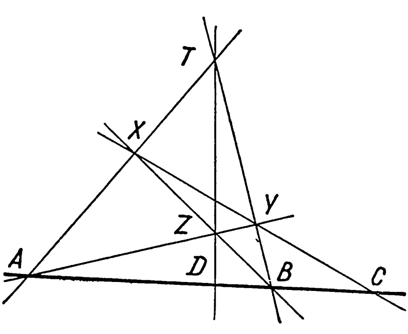

Рис. 31

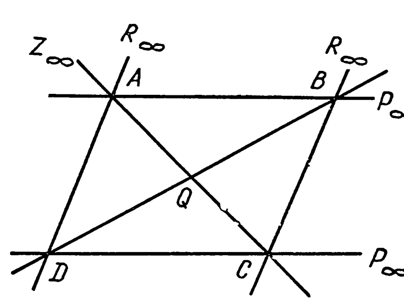

Рис. 32

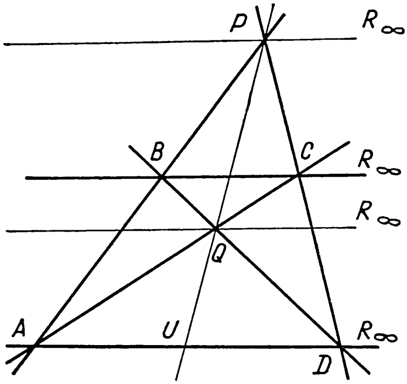

Рис. 33

собственная прямая a_∞ плоскости. Обозначим точку пересечения прямых AC и a_∞ через Z_∞. Мы получили гармоническую четверку (A, C, Q, Z_∞). Из гармонизма этой четверки по теореме § 4, п. 2 следует, что Q — середина отрезка AC.

Таким образом, теорема евклидовой геометрии: «*диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам*» — есть частный случай теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника.

2. Пусть несобственной является только одна диагональная точка R_∞, и, следовательно, четырехвершинник $ABCD$ имеет одну пару параллельных противоположных сторон (рис. 33). Тогда, обозначая точку пересечения прямых AD и PQ через U, получаем гармоническую четверку (A, D, U, R_∞), а из этого следует, что U — середина отрезка AD.

Таким образом, теорема евклидовой геометрии «*прямая, соединяющая точку пересечения диагоналей трапеции с точкой пересечения боковых сторон, делит основания трапеции пополам*» является частным случаем теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника.

ГЛАВА IV.

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 11. ПРОЕКТИВНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПРЯМОЙ НА ПРЯМУЮ

1. Перспективное отображение прямой на прямую. В § 1, п. 2 мы рассматривали перспективное отображение расширенной евклидовой прямой на пучок прямых. Теперь термин «перспективное отображение» будет применяться шире: он будет также использоваться для обозначения специального вида отображений прямой на прямую. Все результаты этого и следующего параграфов по принципу двойственности можно перенести на пучки прямых.

Определение. Пусть на проективной плоскости имеются две различные прямые u_1 и u_2 и не принадлежащая им точка S. Отображение $\psi : u_1 \to u_2$, при котором произвольная точка $A_1 \in u_1$ отображается на такую точку $A_2 \in u_2$, что точки S, A_1, A_2 коллинеарны, называется *перспективным отображением с центром* S прямой u_1 в прямую u_2. Формальная запись этого определения имеет вид:

$$\forall A_1 \in u_1 \ \psi(A_1) = u_2 \cap (SA_1).$$

Перспективное отображение обозначается знаком $\overline{\overline{\wedge}}$. Будем использовать два вида записи:

$$\psi : u_1 \xrightarrow{\overline{\overline{\wedge}}} u_2 \quad \text{и} \quad \psi : u_1 \xrightarrow[S]{\overline{\overline{\wedge}}} u_2,$$

причем последняя запись позволяет указать S — центр отображения.

Отметим следующие свойства перспективных отображений.

Свойство 1. *Перспективное отображение биективно.*

Свойство 2. *При перспективном отображении прямой на прямую общая точка этих прямых отображается на себя.*

Свойство 3. *При перспективном отображении сохраняется двойное отношение любой четверки точек.*

Первые два свойства вытекают непосредственно из определения. Третье свойство представляет собой перефразировку следствия 1 из основного свойства двойных отношений (§ 9, п. 5).

2. Проективное отображение прямой на прямую и его задание.

Определение. Биективное отображение прямой на прямую, сохраняющее двойное отношение произвольной четверки точек, называется *проективным отображением*.

При необходимости подчеркнуть проективный характер отображения будем употреблять знак $\overline{\wedge}$, используя запись φ:

$$u_1 \underset{\to}{\overline{\wedge}} u_2.$$

Примечание. В нашем определении требование биективности избыточно: биективность можно было бы доказать, исходя из инвариантности двойного отношения.

Очевидно, что перспективные отображения представляют собой частный случай проективных — это вытекает из свойств 1 и 3, о которых шла речь в предыдущем пункте. А так как перспективное отображение существует, то этим самым доказывается существование проективных отображений.

Отметим также, что *композиция нескольких проективных отображений тоже проективное отображение.*

Теорема. *Пусть A_1, B_1, C_1 — три различные точки прямой u_1, а A_2, B_2, C_2 — точки прямой u_2. Тогда существует одно и только одно проективное отображение $\varphi: u_1 \to u_2$, при котором точки A_1, B_1, C_1 отображаются соответственно на A_2, B_2, C_2.*

Доказательство. *Единственность.* Пусть φ и φ' — два отображения, удовлетворяющие условиям теоремы, и $M_1 \in u_1$ — произвольная точка. Пусть далее $\varphi(M_1) = M_2$ и $\varphi'(M_1) = M_2'$. Тогда по определению проективного отображения будет:

$$(A_2B_2C_2M_2) = (A_2B_2C_2M_2') = h,$$

где $h = (A_1B_1C_1M_1)$. В силу теоремы 1 § 3, п. 3 $M_2 = M_2'$ и, следовательно, $\varphi = \varphi'$.

Заметим, что единственность отображения доказана без каких-либо ограничений в отношении прямых u_1 и u_2, которые, в частности, могут и совпадать.

Существование. Рассмотрим сначала случай, когда $u_1 \neq u_2$. На прямой A_1A_2 возьмем произвольно две различные точки S_1 и S_2, отличные от A_1, A_2, а затем через точки $B = (S_1B_1) \cap (S_2B_2)$ и $C = (S_1C_1) \cap (S_2C_2)$ проведем прямую u (рис. 34).

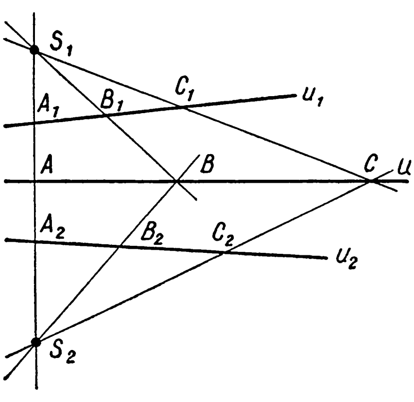

Рис. 34

Отображение $\psi = \psi_2 \circ \psi_1$, где

$$\psi_1: u_1 \underset{S_1}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} u, \quad \psi_2: u \underset{S_2}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} u_2,$$

есть искомое отображение: оно проективно как композиция перспективных отображений и

$$\varphi: A_1 \to A_2, \quad B_1 \to B_2, \quad C_1 \to C_2.$$

Если же $u_1 = u_2$ (эти совпавшие прямые будем обозначать одной буквой u), то на какой-либо другой прямой u_0 возьмем произвольно точки A_0, B_0, C_0. По доказанному выше существуют проективные отображения

$$\varphi_1 : u \to u_0,\ \varphi_2 : u_0 \to u$$

такие, что

$$\varphi_1 : A_1 \to A_0,\ B_1 \to B_0,\ C_1 \to C_0;\ \varphi_2 : A_0 \to A_2,\ B_0 \to B_2,\ C_0 \to C_2.$$

Их композиция $\varphi_2 \circ \varphi_1$ есть искомое проективное отображение.

Теорема доказана.

Следствие. *Проективное отображение одной прямой на другую может быть разложено в композицию не более двух перспективных отображений, если прямые различны, и не более трех, если прямые совпадают.*

Первое утверждение этого следствия со всей очевидностью вытекает из доказательства теоремы; в справедливости второго утверждения легко убедиться, если проанализировать конец доказательства теоремы. Фактически доказательство второй части выполнено при решении примера 1 в § 12.

3. Условие перспективности проективного отображения.

Теорема. *Для того чтобы проективное отображение прямой на прямую было перспективным, необходимо и достаточно, чтобы точка X, принадлежащая обеим прямым, отображалась сама на себя.*

Доказательство. Необходимость доказывать не надо, поскольку это утверждение совпадает со свойством 2 перспективных отображений (пункт 1). Докажем достаточность.

Пусть φ — проективное отображение прямой u_1 на прямую u_2 и $\varphi(X) = X$. Пусть далее $A_1, B_1 \in u_1$ — какие-либо точки, не совпадающие с X, а $A_2, B_2 \in u_2$ — их образы при отображении φ. По теореме предыдущего пункта φ — единственное проективное отображение, при котором образами точек A_1, B_1, X будут соответственно точки A_2, B_2, X. Однако тем же свойством обладает и перспективное отображение $\psi : u_1 \xrightarrow[S]{\overline{\overline{\wedge}}} u_2$, где $S = (A_1A_2) \cap (B_1B_2)$. Следовательно, $\psi=\varphi$.

Теорема доказана.

4. Теорема Паппа[1]. *Пусть u и v — две различные прямые, на каждой из которых взято по три различных точки: $A_1, A_3, A_5 \in u$, $A_2, A_4, A_6 \in v$. Тогда три точки*

$$P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5),$$
$$Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6),$$
$$R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$$

инцидентны одной прямой (рис. 35).

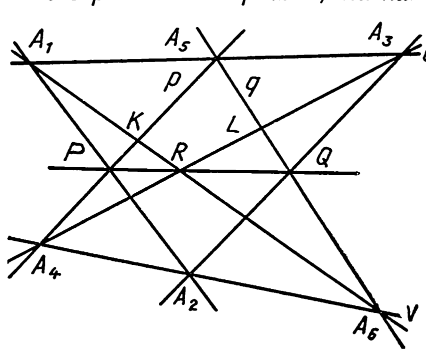

Рис. 35

[1] Папп (III—IV в. н. э.) — греческий математик.

Доказательство. Обозначим прямые A_4A_5 и A_5A_6, соответственно через p и q и рассмотрим проективное отображение $\varphi : p \to q$, которое определим как композицию двух перспективных — $\varphi = \psi' \circ \psi$, где

$$\psi : p \underset{A_1}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} v,\ \psi' : v \underset{A_3}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} q.$$

Введем обозначения еще двух точек: $K = p \cap (A_1A_6)$, $L = q \cap (A_3A_4)$ — и найдем образы точек A_5, A_4, K, $P \in p$ относительно проективного отображения φ. Имеем:

$$\varphi : \begin{cases} A_5 \xrightarrow{\psi} u \cap v \xrightarrow{\psi'} A_5, \\ A_4 \xrightarrow{\psi} \quad A_4 \xrightarrow{\psi'} L, \\ K \xrightarrow{\psi} \quad A_6 \xrightarrow{\psi'} A_6, \\ P \xrightarrow{\psi} \quad A_2 \xrightarrow{\psi'} Q. \end{cases}$$

Прежде всего замечаем, что проективное отображение $\varphi : p \to q$ оставляет неподвижной точку пересечения прямых p и q — точку A_5. По теореме предыдущего пункта это означает, что φ — перспективное отображение.

Найдем центр перспективы. Так как $\varphi(A_4) = L$ и $\varphi(K) = A_6$, то центр перспективы лежит на прямых A_4L и KA_6, т. е. это будет точка R. А так как $\varphi(P) = Q$, то прямая PQ проходит через центр перспективы.

Теорема доказана. Фигура на рисунке 35 является конфигурацией (§ 8, п. 2).

Читателю предлагается самостоятельно сформулировать двойственную теорему, сделать к ней чертеж и убедиться, что она является простым следствием теоремы Паппа.

Полезным упражнением будет аналитическое доказательство теоремы Паппа, для чего целесообразно задать проективную систему координат четверкой фундаментальных точек из числа точек A_i.

Теорема Паппа представляет собой частный случай теоремы Паскаля, которая будет рассмотрена позднее (см. § 17, п. 1).

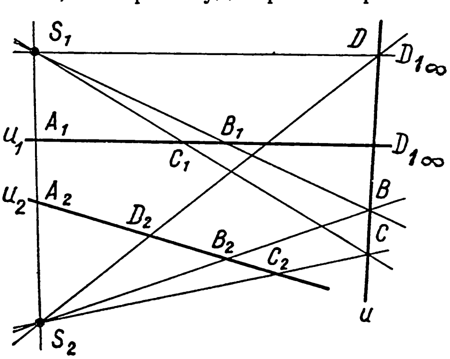

Рис. 36

Пример 1. *На расширенной евклидовой плоскости заданы прямые u_1 и u_2 и проективное отображение $\varphi : u_1 \to u_2$, определенное тремя парами соответствующих точек: $A_1 \to A_2$, $B_1 \to B_2$, $C_1 \to C_2$. Построим образ D_2 несобственной точки $D_{1\infty}$ прямой u_1.*

Решение. Отображение φ представим в виде композиции двух перспективных отображений — $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$:

$$\psi_1 : u_1 \overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\underset{S_1}{\longrightarrow}} u; \ \psi_2 : u \overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\underset{S_2}{\longrightarrow}} u_2,$$

где S_1 и S_2 — произвольные точки прямой A_1A_2, а u — прямая, проходящая через точки $B = (S_1B_1) \cap (S_2B_2)$ и $C = (S_1C_1) \cap (S_2C_2)$ (рис. 36). Точка $D = \psi_1 (D_{1\infty})$ находится на пересечении прямой u и прямой $S_1D_{1\infty}$, проходящей через S_1 параллельно u_1. Искомая точка $D_2 = \varphi (D_{1\infty}) = \psi_2 (D)$ есть точка пересечения прямых u_2 и S_2D.

§ 12. ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРЯМОЙ. ИНВОЛЮЦИИ

1. Проективное преобразование прямой. Напомним, что *преобразованием множества* называется биективное отображение множества на себя. Проективным преобразованием проективной прямой $\boldsymbol{P}_1$ мы называем проективное отображение $\varphi : \boldsymbol{P}_1 \overset{\overline{\wedge}}{\longrightarrow} \boldsymbol{P}_1$. Определение проективного отображения (§ 11, п. 2) в данном случае может быть конкретизировано следующим образом.

Определение. *Проективным преобразованием прямой $\boldsymbol{P}_1$* называется преобразование, при котором сохраняется двойное отношение произвольных четырех точек.

Теорема 1. *Проективные преобразования прямой $\boldsymbol{P}_1$ образуют группу.*

Доказательство вытекает непосредственно из определения.

Теорема 2. *Пусть на проективной прямой заданы две упорядоченные тройки точек, причем в каждой тройке все точки различны. Тогда существует единственное проективное преобразование прямой, отображающее первую тройку на вторую.*

Эта теорема представляет собой частный случай теоремы § 11, п. 2.

Следствие. *Проективное преобразование прямой, отличное от тождественного, может иметь не более двух неподвижных точек.*

2. Уравнения проективного преобразования прямой. Пусть на прямой $\boldsymbol{P}_1$, на которой установлена проективная система координат $R = R (E_i)$, $i = 1, 2, 0$, действует проективное преобразование φ. Требуется найти его уравнение, т. е. определить связь между координатами произвольной точки $X (x_1, x_2)$ и ее образа $X (x_1' : x_2')$.

Введем обозначения для образов фундаментальных точек: $\varphi (E_i) = E_i'$, $i = 1, 2, 0$, и рассмотрим вспомогательную систему координат $R' = R (E_i')$. По определению проективного преобразования

$$(E_1E_2E_0X) = (E_1'E_2'E_0'X')$$

и в силу теоремы о связи проективных координат с двойным отношением (§ 3, п. 3, теорема 2) координаты точки X в системе R будут такие же, как и координаты точки X' в системе R'.

Таким образом, точка X' в системе R имеет координаты $(x_1' : x_2')$, а в системе R' — $(x_1 : x_2)$. Координаты точки в двух разных системах координат связаны уравнениями перехода (2.2), поэтому

$$\lambda X = PX', \tag{12.1}$$

где X и X' — координатные столбцы прообраза и образа, P — неособенная квадратная матрица второго порядка, λ — коэффициент пропорциональности.

В конкретных задачах вместо матричного уравнения проективного преобразования обычно используют систему

$$\begin{cases} \lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2', \\ \lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2', \end{cases} \tag{12.2}$$

где p_{ij} — элементы матрицы P.

Уравнение (12.1) можно разрешить относительно X':

$$\mu X' = QX, \tag{12.3}$$

где $\mu = \lambda^{-1}$, $Q = P^{-1}$.

Обратим внимание на то, что формулы преобразования координат (2.2) и (2.4) и уравнения проективного преобразования (12.1) и (12.3) имеют разный геометрический смысл, хотя формально они одинаковы: первые выражают связь между координатами одной и той же точки в разных координатных системах, а вторые — между координатами разных точек в одной системе.

3. Композиция проективных преобразований. Найдем композицию двух проективных преобразований φ_1 и φ_2, заданных соответственно уравнениями $\lambda_1 X = P_1 X'$ и $\lambda_2 X = P_2 X'$.

Пусть X — какая-либо точка и $\varphi_1(X) = X_1$, $\varphi_2(X_1) = X'$. Тогда $\lambda_1 X = P_1 X_1$ и $\lambda_2 X_1 = P_2 X'$, откуда:

$$(\lambda_1 \lambda_2) X = (P_1 P_2) X'. \tag{12.4}$$

Мы получили уравнение преобразования $\varphi_2 \circ \varphi_1$. Его матрица с точностью до множителя равна $P_1 P_2$ (обратите внимание на порядок сомножителей!).

Итак, *матрица композиции двух проективных преобразований с точностью до множителя равна произведению матриц перемножаемых преобразований, причем матрица первого преобразования будет левым сомножителем.*

Матрица тождественного преобразования с точностью до множителя равна единичной матрице E:

$$P = aE = a\begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{Vmatrix};$$

такая матрица называется *скалярной*. Поэтому *матрица обратного преобразования с точностью до множителя равна обратной матрице данного преобразования.*

4. Определение и признак инволюции. Задание. Как известно, инволюционным преобразованием называют нетождественное преобразование φ, совпадающее со своим обратным: $\varphi = \varphi^{-1}$. Признак инволюционности можно записать и в таком виде: $\varphi^2 = e$, где e — тождественное преобразование.

В этом параграфе мы будем изучать инволюционные проективные преобразования прямой, обычно называемые просто инволюциями.

Определение. *Инволюцией* называется нетождественное проективное преобразование прямой, совпадающее со своим обратным.

Теорема 1. *Для того чтобы проективное преобразование φ прямой было инволюцией, необходимо и достаточно, чтобы на этой прямой имелась пара различных точек A и A', отображающихся одна на другую.*

Доказательство. Необходимость очевидна, докажем *достаточность*.

Пусть дано проективное преобразование φ и $\varphi : A \leftrightarrow A'$. Требуется доказать, что для любой точки X из $\varphi : X \to X'$ должно следовать $\varphi : X' \to X$.

Обозначим образ точки X' через X''. Тогда в силу проективного характера преобразования φ будет $(AA'XX') = (A'AX'X'')$, а по теореме § 3, п. 5 $(AA'XX') = (A'AX'X)$ и, следовательно, $(A'AX'X) = (A'AX'X'')$, а из этого равенства в силу теоремы 1 § 3, п. 3 получаем $X = X''$, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Пусть на проективной прямой заданы две пары точек, причем хотя бы в одной из пар точки различны. Тогда существует единственная инволюция, переставляющая точки каждой пары.*

Примечание. В дальнейшем требование несовпадения точек будет снято.

Доказательство теоремы. Точки первой пары обозначим через A, A', второй — B, B', $A \neq A'$. Зададим проективное преобразование условиями

$$\varphi : A \to A', \ A' \to A, \ B \to B';$$

в силу теоремы 2 п. 1 такое преобразование существует и единственно, а по предыдущей теореме оно инволюционно.

Теорема доказана.

5. Уравнения инволюции. Дано проективное преобразование φ с уравнением $\lambda X = PX'$. Требуется выяснить, какие ограничения должны быть наложены на коэффициенты уравнения (т. е. на матрицу P), чтобы преобразование стало инволюцией.

Условие инволюционности $\varphi^2 = e$ в соответствии с правилом перемножения проективных преобразований (п. 3) означает, что матрица P^2 скалярная. Пусть

$$P = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix},$$

тогда в матрице

$$P^2 = \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} a & b \\ c & d \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{Vmatrix}$$

элементы, стоящие на главной диагонали, равны между собой, а остальные — нули. Это приводит к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} b\,(a+d)=0, \\ c\,(a+d)=0, \\ (a-d)\ (a+d)=0. \end{cases}$$

Если $a+d\neq 0$, то $b=c=0$, $a=d$. Следовательно, P — скалярная матрица, а φ — тождественное преобразование.

Если $a+d=0$, то система уравнений, обеспечивающая инволюционность преобразования, удовлетворяется. Преобразование φ в этом случае нетождественное (почему?).

Итак, *для того чтобы проективное преобразование прямой было инволюционным, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементов, стоящих на главной диагонали матрицы преобразования, равнялась нулю.*

Уравнения инволюции имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda x_1'=ax_1+bx_2, \\ \lambda x_2'=cx_1-ax_2. \end{cases} \tag{12.5}$$

Они могут быть упрощены, если в качестве координатных точек E_1 и E_2 принять точки, соответствующие друг другу в инволюции. В этом случае образ точки E_1 $(1:0)$, в силу уравнения (12.5), будет иметь координаты $(a:c)$, а поскольку образом точки E_1 $(1:0)$ является точка E_2 $(0:1)$, то $a=0$. Получаем уравнения инволюции в следующем виде:

$$\begin{cases} \lambda x_1'=bx_2, \\ \lambda x_2'=cx_1, \end{cases} \tag{12.6}$$

где $b\neq 0$ и $c\neq 0$, так как в противном случае отображение, определяемое уравнениями (12.6), не будет преобразованием. В самом деле, если, например, $b=0$, то всегда $x_1'=0$, т. е. образом любой точки будет точка E_2 $(0:1)$. Отображение, следовательно, не биективно и потому не попадает под общее определение преобразования.

6. Неподвижные точки. Виды инволюций. Найдем число неподвижных точек инволюции (12.6). Координаты неподвижной точки и ее образа пропорциональны, поэтому они могут быть найдены из системы:

$$\begin{cases} \lambda x_1=bx_2, \\ \lambda x_2=cx_1, \end{cases}$$

откуда:

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2=\frac{b}{c}.$$

Если $\frac{b}{c}>0$, то имеются две неподвижные точки. Инволюция называется *гиперболической*.

Если $\frac{b}{c} < 0$, то неподвижных точек нет. Инволюция называется *эллиптической*.

Теорема 1. *В случае гиперболической инволюции любые две пары различных соответствующих точек не разделяют друг друга, а в случае эллиптической — разделяют. Больше того, какова бы ни была эллиптическая инволюция, для любой пары соответствующих точек единственным образом найдется другая пара, которая первую делит гармонически.*

Доказательство. Точки одной пары примем за координатные точки $E_1\ (1:0)$ и $E_2\ (0:1)$. Тогда уравнения инволюции имеют вид (12.6). Если $A\ (a_1 : a_2)$ — одна из точек второй пары, то другая точка B в соответствии с уравнениями (12.6) имеет координаты $(ba_2 : ca_1)$. Поэтому

$$A = a_1E_1 + a_2E_2;\ \ B = ba_2E_1 + ca_1E_2$$

и, следовательно,

$$(E_1E_2AB) = \frac{a_2}{a_1} : \frac{ca_1}{ba_2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2}.$$

Знак двойного отношения согласно § 3, п. 4 позволяет судить о разделенности или неразделенности пар точек. А именно, если $\frac{b}{c} > 0$ (*гиперболическая инволюция*), то $(E_1E_2AB) > 0$ и $E_1, E_2 \doteq A, B$; если $\frac{b}{c} < 0$ (*эллиптическая инволюция*), то $(E_1E_2AB) < 0$ и $E_1, E_2 \div A, B$.

Для нахождения пары соответственных точек, гармонически делящих пару E_1, E_2, надо найти $a_1 : a_2$ из уравнения $\frac{b}{c} \cdot \frac{a_2^2}{a_1^2} = -1$.

Так как инволюция эллиптическая, то $\frac{b}{c} < 0$ и потому уравнение разрешимо. Оно имеет два решения — $a_1 : a_2 = \sqrt{|b|} : \pm\sqrt{|c|}$. Нетрудно видеть, что две точки, определяемые этими решениями, соответствуют друг другу в инволюции, поэтому существует единственная пара соответствующих точек, делящая пару E_1, E_2 гармонически.

Теорема доказана.

Теорема 2. *Неподвижные точки гиперболической инволюции гармонически делят любую пару соответствующих точек.*

Доказательство. Пусть U и V — неподвижные точки, а A, A' — пара соответствующих точек. Тогда в силу проективного характера инволюции будет $(UVAA') = (UVA'A)$. А так как, кроме того, $(UVAA') = \frac{1}{(UVA'A)}$, то

$$(UVA'A)^2 = 1.$$

Если $(UVA'A) = 1$, то точки A и A' совпадают. Но так как трех неподвижных точек нетождественное проективное преобразование иметь не может (см. следствие из теоремы 2, п. 1), то этот вариант отпадает. Остается единственная возможность — $(UVA'A) = -1$.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е 1. *Две неподвижные точки задают гиперболическую инволюцию.*

В самом деле, при этих условиях образ любой точки может быть найден по теореме 2.

П р и м е ч а н и е. Рассмотренное следствие позволяет снять ограничение, содержащееся в условии теоремы 2, п. 1, и считать, что любые две пары соответствующих точек определяют инволюцию.

С л е д с т в и е 2. *Каковы бы ни были две неразделенные пары, существует единственная третья пара, которая каждую из данных пар делит гармонически.*

Две данные пары, если точки каждой пары считать соответствующими друг другу, в силу теоремы 2 (пункт 1) определяют инволюцию, которая вследствие теоремы 1 настоящего пункта будет гиперболической. Неподвижные точки этой инволюции — искомые точки, так как по теореме 2 они делят данные пары гармонически.

П р и м е р 1. *Проективное преобразование* $\varphi : \boldsymbol{P}_1 \to \boldsymbol{P}_1$ *задано тремя парами соответствующих точек:*

$$A \to A', \; B \to B', \; C \to C'.$$

Построим образ произвольной точки M (рис. 37).

Р е ш е н и е. Разложим преобразование φ в композицию трех перспективных отображений: $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi$ (см. следствие из теоремы § 11, п. 2). С этой целью произвольно выберем прямую u и точку S, после чего зададим отображение $\psi : \boldsymbol{P}_1 \underset{S}{\overset{=}{\overset{\wedge}{\to}}} u$. Образы точек

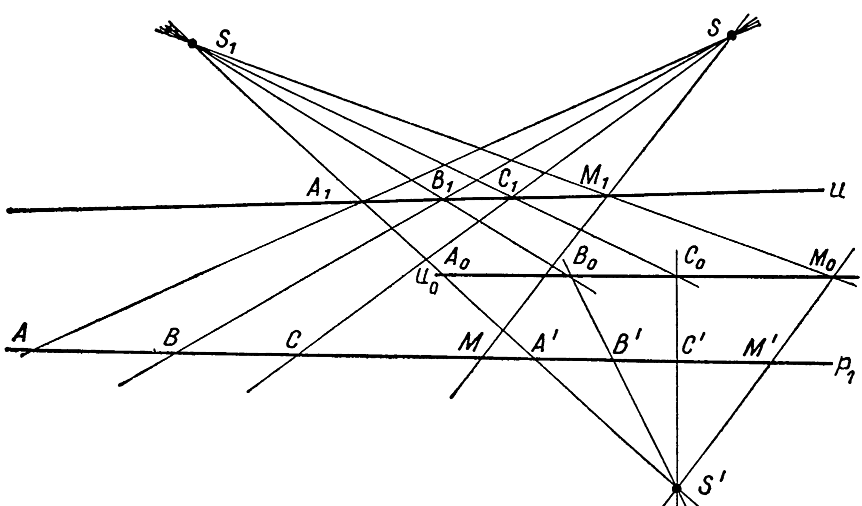

Рис. 37

A, B, C относительно преобразования ψ обозначим соответственно через A_1, B_1, C_1.

Зададим отображения

$$\psi_1 : u \underset{S_1}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} u_0,\quad \psi_2 : u_0 \underset{S'}{\overset{\overline{\overline{\wedge}}}{\to}} P_1,$$

где S_1 и S' — произвольные точки прямой AA', u_0 — прямая, проходящая через точки $B_0 = (S_1B_1) \cap (S'B')$, $C_0 = (S_1C_1) \cap (S'C')$. Теперь легко строится образ M' точки M при отображении φ:

$$\varphi(M) = \psi_2 \circ \psi_1 \circ \psi(M) = \psi_2 \circ \psi_1 (M_1) = \psi_2 (M_0) = M'.$$

Пример 2. *Зная координаты трех точек и их образов*: $A(0:1) \to A'(1:2)$, $B(2:—1) \to B'(1:0)$, $C(1:—2) \to C'(0:1)$, *найдем уравнения проективного преобразования прямой.*

Решение. Согласно равенству (12.3) уравнения преобразования ищем в виде:

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = p_{11}x_1 + p_{12}x_2, \\ \lambda x'_2 = p_{21}x_1 + p_{22}x_2. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему координаты данных точек, получаем:

$$\begin{cases} \lambda_1 = p_{12}, \\ 2\lambda_1 = p_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_2 = 2p_{11} - p_{12}, \\ 0 = 2p_{21} - p_{22}, \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = p_{11} - 2p_{12}, \\ \lambda_3 = p_{21} - 2p_{22}. \end{cases}$$

В этих шести уравнениях семь неизвестных, но так как неизвестные определены лишь с точностью до множителя, то, придав одному из неравных нулю неизвестных произвольное значение, например $\lambda_1 = 1$, получим: $p_{12} = 1$, $p_{22} = 2$, $p_{21} = 1$, $p_{11} = 2$.

Таким образом, мы определили все коэффициенты в уравнениях преобразования:

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = 2x_1 + x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

Пример 3. *Инволюция задана двумя парами соответственных точек*: $\varphi : A(1:1) \leftrightarrow A'(5:—3)$, $B(1:0) \leftrightarrow B'(2:—1)$. *Найдем уравнения инволюции.*

Решение. Поскольку уравнения (12.5) обеспечивают инволюционность, то достаточно потребовать, чтобы точки A' и B' были образами точек A и B (в одну сторону). Это приводит к системам:

$$\begin{cases} 5\lambda' = a + b, \\ -3\lambda' = c - a, \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda'' = a, \\ -\lambda'' = c. \end{cases}$$

Полагая $c = 1$, находим сначала $\lambda'' = -1$, $a = -2$, а затем $\lambda' = -1$, $b = -3$. Получаем уравнения инволюции φ:

$$\begin{cases} \lambda x'_1 = -2x_1 - 3x_2, \\ \lambda x'_2 = x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

§ 13. КОЛЛИНЕАЦИИ

1. О проективных преобразованиях плоскости. По определению проективная плоскость представляет собой множество точек и прямых, поэтому проективное преобразование $\boldsymbol{P}_2$ может отображать точки — на точки, прямые — на прямые. Однако возможны и такие преобразования, при которых образом точки будет прямая, а образом прямой — точка. Именно такой характер имело преобразование f, которое мы рассматривали в § 8, п. 1 и § 9, п. 3 при установлении принципа двойственности. Следовательно, имеются два типа проективных преобразований в зависимости от того, переводят ли они элементы проективной плоскости какого-либо вида в элементы того же или другого вида. Преобразования первого типа, отображающие прямые в прямые, а точки — в точки, называются *коллинеациями*, преобразования второго типа, отображающие прямые в точки, а точки в прямые, называются *корреляциями*.

Проективные преобразования $\varphi : \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_2$ определяются требованиями, в соответствии с которыми должны сохраняться:

1) инцидентность точек и прямых;

2) двойное отношение.

Напомним, что требование биективности содержится в общем определении преобразования (см. § 12, п. 1), и потому здесь оно отсутствует. При рассмотрении же проективного отображения одной плоскости на другую оно должно быть включено в определение (либо быть доказанным).

Первое требование надо понимать так, что инцидентные точка и прямая переходят в инцидентные, а неинцидентные — в неинцидентные. Из этого же требования вытекает, что коллинеарные точки преобразуются в коллинеарные точки (при коллинеациях) или в прямые одного пучка (при корреляциях). Это обстоятельство делает корректным второе требование.

Из определения проективного преобразования следует, что множество всех проективных преобразований образует группу. Эта группа называется *проективной*. Действительно, композиция двух коллинеаций или двух корреляций есть коллинеация, а композиция коллинеации и корреляции — корреляция. Множество коллинеаций также является группой, называемой *группой коллинеаций* и обозначаемой буквой $\boldsymbol{K}$. *Множество корреляций группы не образует.* Группа всех проективных преобразований, группа коллинеаций и некоторые их подгруппы будут специально рассматриваться в главе VI.

2. Определение коллинеаций и их задание.

Определение. Преобразование $\varkappa : \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_2$ называется *коллинеацией*, если образом точки является точка, образом прямой — прямая и сохраняется инцидентность точек и прямых, а также двойное отношение любой четверки коллинеарных точек.

Требование инвариантности двойного отношения четырех прямых пучка может быть доказано, и потому не включается в определение.

Пусть a_i, $i = 1, 2, 3, 4,$ — прямые одного пучка, A_i — точки пересечения этих прямых с какой-либо прямой. Пусть $\varkappa$ — коллинеация и $a'_i = \varkappa(a_i)$, $A'_i = \varkappa(A_i)$. Тогда по определению коллинеации точки A'_i коллинеарны, $A'_i \in a'_i$ и $(A_1A_2A_3A_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4)$. А так как по основному свойству двойных отношений (9.4) $(a_1a_2a_3a_4) = (A_1A_2A_3A_4)$ и $(a'_1a'_2a'_3a'_4) = (A'_1A'_2A'_3A'_4)$, то $(a_1a_2a_3a_4) = (a'_1a'_2a'_3a'_4)$.

Мы доказали *инвариантность двойных отношений прямых при коллинеации*.

Приведенное определение коллинеации избыточно. Штаудт[1] показал, что в определении не обязательно также требование инвариантности двойного отношения точек, поскольку это свойство может быть доказано. Исследования Штаудта остаются за рамками настоящего пособия.

Теорема. *Пусть заданы две упорядоченные четверки точек, причем в каждой из этих четверок никакие три точки не коллинеарны. Тогда существует единственная коллинеация, отображающая первую четверку на вторую*[2].

Доказательство. *Существование.* Данные четверки точек примем за фундаментальные четверки, определяющие системы координат R и R'. Рассмотрим преобразование проективной плоскости, определяемое следующими условиями: образом любой точки (прямой) является такая точка (прямая), которая в системе R' имеет такие же координаты, какие исходная точка (прямая) имеет в системе R.

Это преобразование есть коллинеация. В самом деле, оно сохраняет инцидентность, так как условие инцидентности $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0$ точки $X(x_1 : x_2 : x_3)$ и прямой $u(u_1 : u_2 : u_3)$, записанное при помощи координат в системе R, является в то же время и условием инцидентности их образов, записанным в системе R'. Аналогично приходим к выводу об инвариантности двойных отношений: двойное отношение выражается через координаты, а координаты образов и прообразов равны (хотя и в разных системах).

Кроме того, наша коллинеация отображает первую четверку на вторую, так как координаты точек первой четверки в системе R такие же, как координаты точек второй четверки в системе R'. Поэтому построенная коллинеация удовлетворяет условию теоремы.

Единственность. Пусть $\varkappa$ — коллинеация и

$$\varkappa : A \to A',\ B \to B',\ C \to C',\ D \to D'.$$

Докажем, что этими условиями образ X' произвольной точки X определен однозначно. Точка X не может находиться одновременно на всех прямых, соединяющих попарно точки A, B, C, D. Пусть, например, $X \notin (CD)$.

Введем обозначения $m = (DX)$, $n = (CX)$ и убедимся, что прямые $m' = \varkappa(m)$, $n' = \varkappa(n)$ определены однозначно.

По определению коллинеации

$$\varkappa : a \to a',\ b \to b',\ c \to c',$$

[1] Христиан Штаудт (1798—1867) — немецкий математик, автор фундаментальных работ по основаниям проективной геометрии.

[2] Сравните с теоремой о задании проективного преобразования прямой.

где $a = (DA)$, $b = (DB)$, $c = (DC)$, $a' = (D'A')$, $b' = (D'B')$, $c' = (D'C')$.

Поэтому $(abcm) = (a'b'c'm')$. В соответствии с предложением, двойственным теореме 1 § 3, п. 3, прямая m' этим равенством определена однозначно.

Аналогично показывается, что прямая n' тоже определена однозначно. Тем самым однозначно определяется и точка $X' = m' \cap n'$, так как прямые m' и n' не совпадают.

Теорема доказана.

3. Уравнения коллинеации. Пусть $\varkappa : \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_2$ — коллинеация и $R = R\,(E_i)$, $i = 1, 2, 3, 0$, — какая-либо система проективных координат на плоскости $\boldsymbol{P}_2$. Требуется, зная координаты произвольной точки $X\,(x_1 : x_2 : x_3)$ в системе R, найти координаты $(x_1' : x_2' : x_3')$ точки $X' = \varkappa\,(X)$ в этой же системе. Тот же вопрос должен быть решен и для прямых.

Из доказательства теоремы предыдущего пункта вытекает, что точка X' в системе R', определяемой фундаментальными точками $E_i' = \varkappa\,(E_i)$, имеет такие же координаты, какие имеет точка X в системе R, т. е.

$$X'\,(x_1' : x_2' : x_3') \text{ — в системе } R,$$

$$X'\,(x_1 : x_2 : x_3) \text{ — в системе } R'.$$

Но координаты одной и той же точки в разных системах координат связаны между собой линейными формулами (6.1). Поэтому получаем следующее уравнение коллинеации:

$$\lambda X = PX'. \tag{13.1}$$

Здесь X — координатный столбец прообраза, X' — образа, P — неособенная квадратная матрица, определенная с точностью до множителя, λ — коэффициент пропорциональности. В подробной записи уравнения коллинеации имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + p_{13}x_3'; \\ \lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + p_{23}x_3'; \\ \lambda x_3 = p_{31}x_1' + p_{32}x_2' + p_{33}x_3'. \end{cases} \tag{13.2}$$

Уравнение (13.1) можно разрешить относительно X':

$$\mu X' = QX, \tag{13.3}$$

где $\mu = \lambda^{-1}$, $Q = P^{-1}$.

Выведем уравнение преобразования прямых. Уравнение прямой в матричной форме $uX = 0$ представляет собой запись условия, связывающего координаты точек прямой u. Координаты образов этих точек в силу (13.1) связаны условием $uPX' = 0$. Значит, uP — строка из координат прямой $u' = \varkappa\,(u)$. Поэтому

$$\lambda u' = uP. \tag{13.4}$$

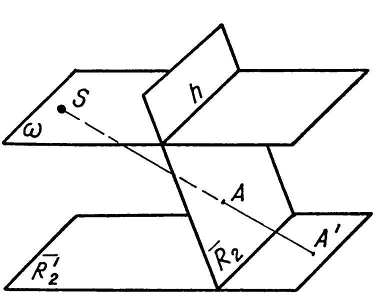

Рис. 38

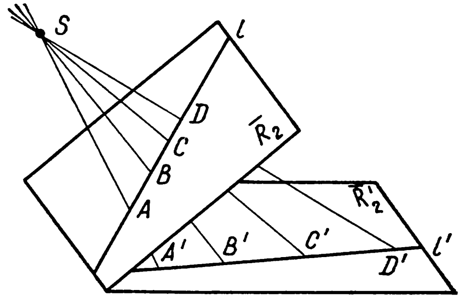

Рис. 39

4. Перспектива[1].

Определение. Пусть в расширенном евклидовом пространстве[2] даны две различные расширенные евклидовы плоскости $\overline{R}_2$, $\overline{R}'_2$ и точка S (центр перспективы), не принадлежащая данным плоскостям. Тогда отображение $\psi : \overline{R}_2 \to \overline{R}'_2$, при котором образом точки $A \in \overline{R}_2$ считается точка $A' = (SA) \cap \overline{R}'_2$ (рис. 38), называется *центральным проектированием* или *перспективой* и обозначается:

$$\psi : \overline{R}_2 \xrightarrow[S]{\overline{\overline{\wedge}}} \overline{R}'_2.$$

Если это определение попытаться сформулировать для нерасширенных плоскостей, то оно станет некорректным. В самом деле, пусть ω — плоскость, проходящая через S параллельно R'_2, и $h = \omega \cap R_2$. Тогда точки прямой h не имеют образов на плоскости R'_2. Именно в связи с этим и были введены Дезаргом несобственные элементы.

Отметим три свойства перспективы.

Свойство 1. *При перспективном отображении прямая отображается на прямую.*

Пусть l — прямая плоскости $\overline{R}_2$. Тогда все прямые, соединяющие центр S перспективы с точками прямой l (проектирующие прямые), лежат в плоскости (Sl). Образом прямой l будет прямая l', по которой плоскость (Sl) пересекает плоскость $\overline{R}'_2$ (рис. 39).

Свойство 2. *При перспективном отображении сохраняется двойное отношение коллинеарных точек.*

Пусть A, B, C, D — коллинеарные точки плоскости $\overline{R}_2$, а A', B', C', D' — их образы на $\overline{R}'_2$ при перспективе с центром S (см. рис. 39). Тогда по следствию 1 из основного свойства двойных отношений (§ 9, п. 5) $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

Свойство 3. *При перспективном отображении сохраняется двойное отношение прямых пучка.*

---

[1] Теорию перспективы начал разрабатывать еще Леонардо да Винчи (1452—1519).

[2] Определение расширенного евклидова пространства аналогично определению расширенной прямой и определению расширенной плоскости.

Доказательство аналогично доказательству свойства коллинеаций (пункт 2).

На основании доказанных свойств делаем вывод, что перспектива является проективным отображением плоскости на плоскость. Более того, композиция $\psi_2 \circ \psi_1$, где

$$\psi_1 : \overline{R}_2 \xrightarrow[S_1]{\overline{\overline{\wedge}}} \overline{R}_2', \quad \psi_2 : \overline{R}_2' \xrightarrow[S_2]{\overline{\overline{\wedge}}} \overline{R}_2,$$

является коллинеацией, отображающей плоскость $\overline{R}_2$ на себя.

Пример 1. *Даны уравнения коллинеации* $\varkappa$:

$$\mu x_1' = x_1 - 2x_2, \ \mu x_2' = x_2 + 3x_3, \ \mu x_3' = -x_2.$$

Найдем: *1) образ точки* $A\,(3 : 1 : -2)$; *2) прообраз точки* $B'\,(-1 : -2 : 1)$; *3) образ прямой* $l\,(2 : 0 : -1)$; *4) прообраз прямой* $m'\,(1 : 1 : 1)$.

Решение. 1) Координаты точки A подставляем в уравнения преобразования $\varkappa$ вместо x_1, x_2, x_3. Получаем $x_1' : x_2' : x_3' = 1 : -5 : -1$. Это и есть координаты точки $A' = \varkappa\,(A)$.

2) Координаты точки B подставляем в уравнения преобразования $\varkappa$ вместо x_1', x_2', x_3'. Получаем:

$$\begin{cases} -\mu = x_1 - 2x_2, \\ -2\mu = x_2 + 3x_3, \\ \mu = -x_2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $x_1 : x_2 : x_3 = 9 : 3 : 1$. Мы получили координаты искомой точки $B = \varkappa^{-1}\,(B')$.

3) *Первый способ*. На прямой l возьмем произвольно две точки, например $C\,(1 : 0 : 2)$, $D\,(0 : 1 : 0)$. При помощи уравнений преобразования находим их образы: $C'\,(1 : 6 : 0)$, $D'\,(-2 : 1 : -1)$. Прямая $C'D'$ искомая. Ее уравнение в силу (6.5) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_1 & 1 & -2 \\ x_2 & 6 & 1 \\ x_3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

или

$$6x_1 - x_2 - 13x_3 = 0.$$

Второй способ. Уравнения преобразования $\varkappa$ решим относительно координат прообраза x_1, x_2, x_3. Получаем:

$$x_1 = \mu\,(x_1' - 2x_3'), \ x_2 = -\mu x_3', \ x_3 = \frac{\mu}{3}\,(x_2' + x_3').$$

Подставляя эти выражения в уравнение данной прямой l

$$2x_1 - x_3 = 0,$$

получаем:

$$2\mu\,(x_1' - 2x_3') - \frac{\mu}{3}\,(x_2' + x_3') = 0$$

или

$$6x_1' - x_2' - 13x_3' = 0.$$

Это и есть уравнение прямой $l' = \varkappa(l)$.

Третий способ. Данное преобразование в матричном виде имеет уравнение $\mu X' = QX$, где

$$Q = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Поэтому уравнение, определяющее преобразование прямых, на основании пункта 3 имеет вид $\mu u = u'Q$ или в подробной записи

$$\mu u_1 = u_1', \ \mu u_2 = -2u_1' + u_2' - u_3', \ \mu u_3 = 3u_2'.$$

Подставляя координаты данной прямой l вместо u_1, u_2, μ_3, получаем:

$$2\mu = u_1', \ 0 = -2u_1' + u_2' - u_3', \ -\mu = 3u_2'.$$

Решая эту систему, находим $u_1' : u_2' : u_3' = -6 : 1 : 13$ — координаты искомой прямой $l' = \varkappa(l)$.

4) Координаты искомой прямой $m = \varkappa^{-1}(m')$ получим, подставив в уже найденные уравнения преобразования прямых вместо u_1', u_2', u_3' координаты данной прямой m'. Находим $u_1' : u_2' : u_3' = 1 : -2 : 3$.

Пример 2. *На расширенной евклидовой плоскости в прямоугольных декартовых координатах дана окружность* $(x - 2)^2 + y^2 = 2$. *Найдем образ этой окружности относительно коллинеации, уравнения которой в соответствующих однородных координатах имеют следующий вид*:

$$\mu x_1' = x_1, \ \mu x_2' = x_2, \ \mu x_3' = x_1 - x_3.$$

Решение. Решая уравнения коллинеации относительно x_1, x_2, x_3, получаем:

$$x_1 = \mu x_1', \ x_2 = \mu x_2', \ x_3 = \mu(x_1' - x_3').$$

Эти выражения подставим в однородное уравнение $(x_1 - 2x_3)^2 + x_2^2 = 2x_3^2$ данной окружности. После упрощений получаем уравнение образа окружности:

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3^2.$$

Возвращаясь к неоднородным координатам, приходим к уравнению

$$x^2 - y^2 = 2.$$

Итак, получается равносторонняя гипербола с асимптотами $y = \pm x$ (рис. 40).

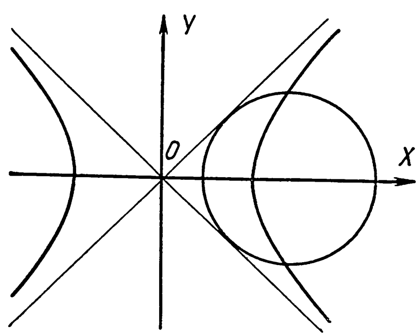

Рис. 40

§ 14. ГОМОЛОГИИ

1. Определение и виды гомологий.

О п р е д е л е н и е. *Гомологией* называется нетождественная коллинеация, для которой существует точечно неподвижная прямая[1], называемая *осью гомологии*.

Т е о р е м а. *Для всякой гомологии γ существует неподвижная точка (центр гомологии), обладающая тем свойством, что каждая инцидентная ей прямая неподвижна. Кроме центра и точек оси, гомология неподвижных точек не имеет.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть p — ось гомологии, $A \notin p$ — какая либо точка, $A' = \gamma(A)$. Пусть далее $B \notin p \cup (AA')$ — какая-либо точка и $B' = \gamma(B)$. Тогда прямые AA' и BB' неподвижны (почему?), и, следовательно, будет неподвижной и точка $P = (AA') \cap \cap (BB')$. Докажем, что P — центр гомологии.

а) $P \notin p$ (*гиперболическая гомология*). В этом случае всякая прямая u, проходящая через P, неподвижна, так как имеет две неподвижные точки — точку P и точку $X = u \cap p$ (рис. 41).

б) $P \in p$ (*параболическая гомология*). В этом случае всякая прямая u, проходящая через точку P, неподвижна потому, что она и ее образ должны составлять одно и то же двойное отношение с тремя прямыми — p, AA', BB' (рис. 42).

Существование центра гомологии доказано. Отсутствие неподвижных точек, кроме центра и точек оси, читателю предлагается доказать самостоятельно.

Приведем примеры видов гомологии на плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$. Для этого рассмотрим преобразование $\gamma = \psi_2 \circ \psi_1$, где

$$\psi_1 : \overline{\boldsymbol{R}}_2 \xrightarrow[S_1]{\overline{\overline{\wedge}}} \overline{\boldsymbol{R}}_2', \quad \psi_2 : \overline{\boldsymbol{R}}_2' \xrightarrow[S_2]{\overline{\overline{\wedge}}} \overline{\boldsymbol{R}}_2$$

(см. § 13, п. 4). Это преобразование, как отмечалось, есть коллинеация, причем прямая $p = \overline{\boldsymbol{R}}_2 \cap \overline{\boldsymbol{R}}_2'$ точечно неподвижна; следовательно, это — гомология с осью p. Центром гомологии является точка $S = (S_1S_2) \cap \overline{\boldsymbol{R}}_2$. На рисунке 43 представлена гиперболическая гомо-

[1] Так называется прямая, все точки которой неподвижны при некотором преобразовании. Термин «неподвижная прямая» используется для обозначения прямой, отображающейся на себя; ее точки могут и не быть неподвижными.

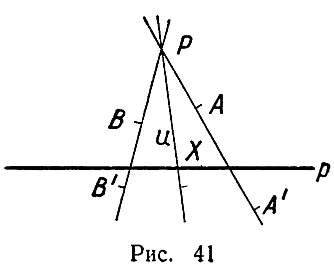

Рис. 41

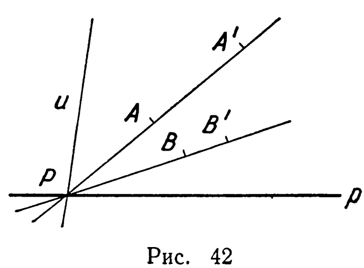

Рис. 42

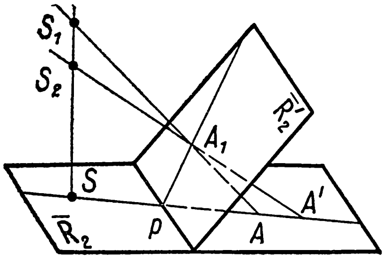

Рис. 43

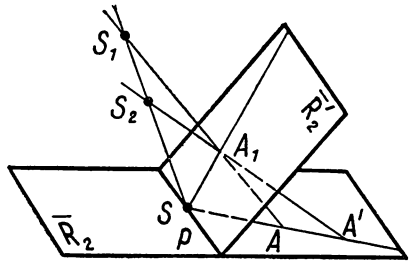

Рис. 44

логия, на рисунке 44 — параболическая. На этих рисунках $A_1 = \psi_1(A)$, $A' = \psi_2(A_1) = \gamma(A)$.

Следующие два свойства непосредственно вытекают из свойств оси и центра.

Свойство 1. *Точка и ее образ лежат на одной прямой с центром гомологии.*

Свойство 2. *Прямая и ее образ пересекаются на оси.*

2. Задание гомологии.

Теорема. *Пусть P и p — произвольные точка и прямая, A, A' — точки, лежащие на одной прямой с P, но отличные от P и не инцидентные p. Тогда существует единственная гомология, для которой P — центр, p — ось, A' — образ A.*

Обозначение такой гомологии: $\gamma_{P,\,p}^{A\to A'}$.

Доказательство выполним только для случая гиперболической гомологии. С небольшими изменениями его можно применить и к случаю параболической гомологии.

Существование. Обозначим через U и V какие-либо точки прямой p, не лежащие на прямой AA'. Рассмотрим коллинеацию $\varkappa$, определяемую условиями:

$$P \to P,\ U \to U,\ V \to V,\ A \to A'$$

(см. теорему о задании коллинеаций). Эта коллинеация оставляет неподвижными три точки прямой $p: U$, V и $X = p \cap (AA')$. На основании следствия из теоремы 2 § 12, п. 1 заключаем, что неподвижны все точки прямой p, следовательно, $\varkappa$ — гомология с осью p; центром гомологии будет точка P как неподвижная точка, не принадлежащая оси.

Единственность. Всякая гомология, удовлетворяющая условию теоремы, обладает теми свойствами, которыми задавалась коллинеация при доказательстве существования. Но коллинеация, заданная двумя четверками точек, в силу теоремы § 13, п. 2 единственна.

Теорема доказана.

Верна и двойственная теорема: *гомологию можно задать центром, осью и парой соответственных прямых a и a'.* Обозначение в этом случае аналогично: $\gamma_{P,\,p}^{a\to a'}$.

Если гомология задана одним из указанных двух способов, то образы данных точек и прямых строить легко. Пусть, например,

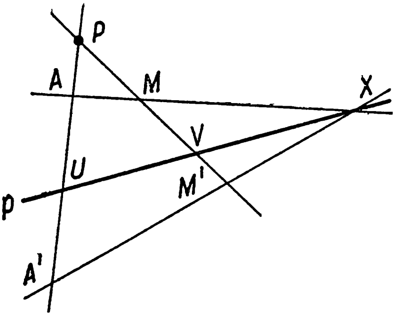

Рис. 45

задана гомология $\gamma_{P,\,p}^{A\to A'}$. Построение образа M' точки $M \notin (AA')$ (рис. 45) проводится следующим образом.

Сначала строится образ прямой AM. Им будет прямая $A'X$, где $X = p \cap (AM)$. Точка M' лежит на этой прямой, и, кроме того, в соответствии со свойством 2 предыдущего пункта она лежит на прямой PM. Итак, $M' = (PM) \cap (A'X)$.

Если $M \in (AA')$, то сначала строится образ N' какой-либо точки $N \notin (AA')$, а затем точка M'.

Теорема этого пункта позволяет дать второе доказательство теоремы Дезарга (см. § 8, п. 2). Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два трехвершинника, причем прямые AA_1, BB_1, CC_1 проходят через одну точку S (см. рис. 19). Требуется доказать, что точки $P = (BC) \cap (B_1C_1)$, $Q = (AC) \cap (A_1C_1)$, $R = (AB) \cap (A_1B_1)$ лежат на одной прямой.

Рассмотрим гомологию $\gamma_{S,(PQ)}^{C\to C_1}$. Так как при этой гомологии $(PC) \to (PC_1)$, то $B \to B_1$ и аналогично $A \to A_1$. Следовательно, $(AB) \to (A_1B_1)$, и потому точка R пересечения этих прямых лежит на оси, т. е. $R \in (PQ)$, что и требовалось доказать.

Подобным образом можно доказать и обратную теорему.

Возвратимся к рисунку 45, полагая, что он относится к гиперболической гомологии. По следствию 1 из основного свойства двойных отношений (§ 9, п. 5) имеем:

$$(PUAA') = (PVMM'),$$

где $U = (AA') \cap p$, $V = (MM') \cap p$. Мы видим, что число $(PUAA')$ не зависит от выбора точки A, а определяется самой гомологией; оно называется *константой гиперболической гомологии.*

Следствие из теоремы о задании гомологии. *Каковы бы ни были неинцидентные прямая p и точка P, а также число h, не равное 0, 1, ∞, существует единственная гиперболическая гомология, для которой p — ось, P — центр, h — константа гомологии.*

3. Инволюционные гомологии.

Определение. Гомология γ называется *инволюционной гомологией*, если она совпадает со своим обратным преобразованием: $\gamma = \gamma^{-1}$.

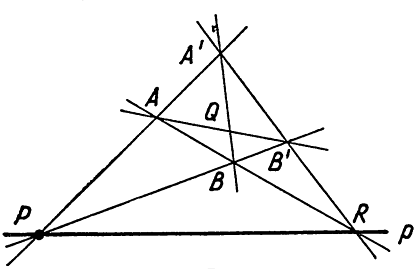

Рис. 46

Прежде всего покажем, что параболическая гомология не может быть инволюционной. В самом деле, пусть γ — параболическая инволюционная гомология с осью p и центром P и пусть имеется две пары соответственных точек: $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, причем $(AA') \neq (BB')$ (рис. 46). Тогда

$$\gamma : (AB) \leftrightarrow (A'B'),\ (AB') \leftrightarrow (A'B).$$

Поэтому точки $Q = (AB') \cap (A'B)$ и $R = (AB) \cap (A'B')$ должны лежать на оси. Получается, что все диагональные точки P, Q, R полного четырехвершинника $ABA'B'$ лежат на одной прямой, чего быть не может (строго это можно обосновать, подсчитав координаты точек P, Q, R в какой-либо системе координат).

Теорема. *Для того чтобы гиперболическая гомология была инволюционной, необходимо и достаточно, чтобы ее константа равнялась —1.*

Доказательство. Пусть p — ось, P — центр гомологии, $P \notin p$. Пусть M' — образ произвольной точки M и $U = (MM') \cap p$. Тогда, если константа гомологии равна —1, то $(PUMM') = -1$, а из этого следует (в силу теоремы § 3, п. 5) $(PUM'M) = -1$. Следовательно, M — образ M' и гомология инволюционна.

Обратно. Если гомология инволюционна, то M и M' отображаются друг на друга, и поэтому константа h гомологии может быть выражена двояко:

$$h = (PUMM'),\ h = (PUM'M).$$

Отсюда следует $h^2 = 1$, а так как $h \neq 1$, то $h = -1$.

Теорема доказана.

Следствие. *Центр и ось определяют инволюционную гомологию.*

Обозначение инволюционной гомологии с центром P и осью p : $\gamma_{P,\ p}$.

4. Гомологии на расширенной евклидовой плоскости. Рассмотрим некоторые частные случаи гомологии на расширенной евклидовой плоскости.

1. *Гомологии с несобственным центром P_∞ и собственной осью p.* Пусть задана гомология $\gamma^{A\to A'}_{P_\infty, p}$, причем, разумеется, $P_\infty \in (AA')$. Образ B' какой-либо точки B в соответствии с пунктом 2 находится на основании двух условий: $B' \in (A'X)$, где $X = (AB) \cap p$ и $(BB') \parallel (AA')$ (рис. 47). Это построение совпадает с построением соответствующих точек при перспективно-аффинном (родственном) преобразовании, заданным осью p и парой точек $A \to A'$. Таким образом, гомология с несобственным центром и собственной осью есть *перспективно-аффинное преобразование.*

Если гомология к тому же инволюционна, то $(P_\infty UAA') = -1$, где $U = (AA') \cap p$. По теореме § 4, п. 2 U — середина отрезка AA'. Такой частный случай перспективно-аффинного преобразования называется *косой симметрией.* Еще более частным случаем будет обычная *осевая симметрия* с осью p.

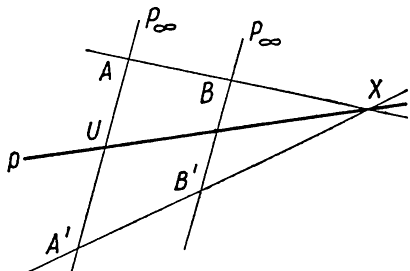

Рис. 47

2. *Гомологии с несобственной осью p_∞ и собственным центром P.*

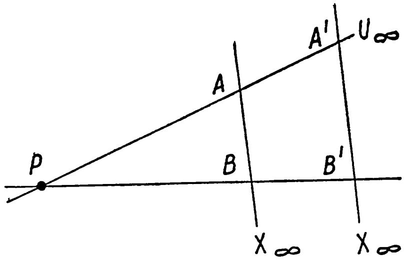

Рис. 48

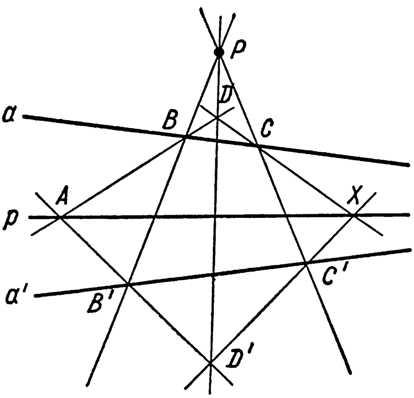

Рис. 49

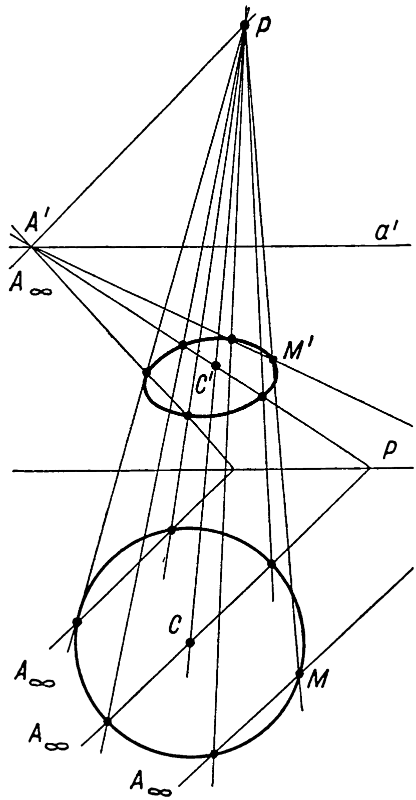

Рис. 50

Рассмотрим гомологию $\gamma_{P,\,p_\infty}^{A\to A'}$, где $P \in (AA')$ (рис. 48). Образ B' какой-либо точки B лежит на прямой $A'X_\infty$, где $X_\infty = (AB) \cap p_\infty$, и на прямой PB. Прямые AB и $A'B'$ параллельны, и, следовательно, в данном случае гомология является гомотетией с центром P и парой соответствующих точек $A \to A'$. Читатель сам может выразить коэффициент гомотетии через константу гомологии.

Если рассматриваемая *гомология инволюционна, то* $(PU_\infty AA') =$ $= -1$, где $U_\infty = (AA') \cap p_\infty$. В этом случае P — середина отрезка AA', и, следовательно, гомология представляет собой *центральную симметрию относительно точки* P.

3. *Гомология с несобственными осью* p_∞ *и центром* P_∞. Читателю предлагается самостоятельно убедиться, что гомология $\gamma_{P_\infty,\,p_\infty}^{A\to A'}$ является *параллельным переносом* (вектором $\overrightarrow{AA'}$). Так как эта гомология является параболической, то инволюционной она быть не может.

Пример 1. *Построим прямую, проходящую через данную точку* A *и недоступную точку пересечения двух данных прямых* a *и* a' (рис. 49).

Р е ш е н и е. Рассмотрим гомологию $\gamma_{P,\ p}^{a \to a'}$, где P — произвольная точка, а p — искомая прямая. Построим образы B',C' произвольных точек B, $C \in a$. Теперь возьмем на (AB) какую-либо точку D и найдем ее образ D'. Очевидно, что образом прямой DC является прямая $D'C'$, стало быть, точка их пересечения X лежит на оси. Прямая AX является искомой прямой p.

Интересно, что то же самое построение может быть обосновано и при помощи теоремы Дезарга.

П р и м е р 2. *Построим образ окружности и ее центра относительно гомологии* $\gamma_{P,\ p}^{a_\infty \to a'}$ (по свойству 2, п. 1 настоящего параграфа $a' \parallel p$).

Р е ш е н и е. Пересечем данную окружность пучком параллельных прямых с центром A_∞ (рис. 50). Образом точки A_∞ является точка $A' = a' \cap (PA_\infty)$. Теперь легко находятся образы прямых пучка, а на этих образах — образы точек окружности и ее центра. Полученные образы точек соединяем плавной кривой.

ГЛАВА V.
КВАДРИКИ

§ 15. КВАДРИКИ И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ. ЗАДАНИЕ КВАДРИКИ ПЯТЬЮ ТОЧКАМИ

1. Определение квадрики.

Определение. Множество точек, проективные координаты которых удовлетворяют уравнению

$$g_{11}x_1^2 + g_{22}x_2^2 + g_{33}x_3^2 + 2g_{12}x_1x_2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 = 0, \quad (15.1)$$

называется *линией второго порядка* или *квадрикой*.

Мы видим, что левая часть уравнения квадрики представляет собой однородный многочлен степени 2, т. е. квадратичную форму относительно переменных x_1, x_2, x_3. Однородность существенна: благодаря однородности уравнение (15.1) имеет геометрический смысл, ибо оно одновременно удовлетворяется (или, напротив, не удовлетворяется) всеми тройками из какого-либо класса пропорциональных троек. Неоднородное же относительно проективных координат уравнение может и не иметь геометрического смысла, так как некоторые тройки из данного класса могут удовлетворять ему, а некоторые нет.

Отметим, что так как формулы (6.2) преобразования координат линейны и однородны, то, переходя в уравнениях (15.1) по этим формулам к другой системе координат, мы получим в левой части снова квадратичную форму. Это значит, что определение квадрики не зависит от выбора системы координат.

Матрица

$$G = \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Vmatrix}, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad (15.2)$$

которую мы условимся обозначать той же буквой, что и саму квадрику, называется матрицей из коэффициентов квадрики или просто *матрицей квадрики*. Она симметрична, т. е. $G^{\mathrm{T}} = G$, где «Т» — знак транспонирования.

Если текущую точку квадрики и столбец из ее координат обозначить буквой X, то уравнение квадрики (15.1) можно записать в матричном виде:

$$X^{\mathrm{T}}GX = 0. \quad (15.3)$$

В тождественности уравнений (15.1) и (15.3) можно убедиться путем непосредственного перемножения матриц в уравнении (15.3).

2. Приведение уравнения квадрики к каноническому виду. Выполним в уравнении квадрики переход к новым координатам по формулам (6.2). Для этого в уравнении (15.3) произведем замену по формуле $X = \frac{1}{\lambda} QX'$, в результате чего получим уравнение $X'^{\mathrm{T}}(Q^{\mathrm{T}}GQ)X = 0$, т. е. в новых координатах матрица G' квадрики такова:

$$G' = Q^{\mathrm{T}}GQ. \tag{15.4}$$

Мы видим, что переход к новым координатам в уравнении квадрики алгебраически эквивалентен линейному преобразованию квадратичной формы $X^{\mathrm{T}}GX$. Поэтому здесь применимы известные факты теории квадратичных форм. Мы их сформулируем в терминах теории квадрик.

Свойство 1. *Ранг матрицы квадрики инвариантен относительно преобразования координат.*

Это свойство вытекает из формулы (15.4) ввиду невырожденности матрицы Q. Если ранг матрицы равен трем, то квадрика называется *невырожденной*, если меньше трех — *вырожденной*.

Свойство 2. *Преобразованием координат уравнение квадрики может быть приведено к виду:*

$$\varepsilon_1 x_1^2 + \varepsilon_2 x_2^2 + \varepsilon_3 x_3^2 = 0, \tag{15.5}$$

где $\varepsilon_i = 1, -1$ *или* 0.

Такой вид уравнения квадрики называется *каноническим*. Приведение к каноническому виду может быть выполнено разными способами, рассматриваемыми в теории квадратичных форм. Наиболее распространен *способ выделения полных квадратов*, называемый также *способом Лагранжа*. По закону инерции квадратичных форм число положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения ее к каноническому виду.

Так как матрица квадрики в канонической форме имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix},$$

то ее ранг равен числу ненулевых коэффициентов в каноническом уравнении (15.5). Если все коэффициенты отличны от нуля, то квадрика невырожденная.

3. Проективная классификация квадрик. С точностью до нумерации координат квадратичная форма от трех переменных может иметь (в зависимости от ранга матрицы) следующие канонические виды:

Ранг 3	Ранг 2	Ранг 1
$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$	$x_1^2 + x_2^2$	x_1^2
$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$	$x_1^2 - x_2^2$	$-x_1^2$
$x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$	$-x_1^2 - x_2^2$	
$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$		

Если рассматривать эти канонические виды как левые части уравнений квадрик, то допустимо умножение на —1. Тогда, умножая, например, уравнение $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ на —1, получаем уравнение $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, которое лишь нумерацией координат отличается от уравнения $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Таким образом получается всего пять видов квадрик на проективной плоскости. Они приведены в таблице вместе с названиями.

Ранг	Уравнение	Название
3	$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$	Нулевая квадрика
	$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$	Овальная квадрика
2	$x_1^2 + x_2^2 = 0$	Пара мнимых прямых
	$x_1^2 - x_2^2 = 0$	Пара прямых
1	$x_1^2 = 0$	Пара совпавших прямых

Уравнению нулевой квадрики удовлетворяет лишь одна вещественная тройка чисел — (0, 0, 0). Но эта тройка не является координатой ни для какой точки, следовательно, нулевая квадрика точек не содержит.

Пара прямых состоит из двух прямых $x_1 + x_2 = 0$ и $x_1 - x_2 = 0$. Мы не говорим «пара пересекающихся прямых», так как на проективной плоскости все прямые пересекаются.

Пара мнимых прямых называется так потому, что левая часть уравнения разлагается на два линейных множителя с мнимыми коэффициентами: $x_1 + ix_2$ и $x_1 - ix_2$. Эта квадрика содержит только одну точку — (0 : 0 : 1).

Пара совпавших прямых есть дважды взятая координатная прямая $x_1 = 0$.

Уравнение квадрики, распавшейся на пару прямых $uX = 0$ и $vX = 0$ (см. формулу (6.7)), можно записать в следующем виде:

$$(uX)\,(vX) = 0. \qquad (15.6)$$

При этом если u и v не пропорциональны, то прямые различны; ранг квадрики в этом случае равен двум. Если u и v пропорциональны, то прямые совпадают, уравнение (15.6) принимает вид:

$$(uX)^2 = 0; \qquad (15.7)$$

в этом случае ранг квадрики равен единице.

Приведенная таблица не позволяет различать вещественные и мнимые квадрики одного ранга. В теории квадратичных форм соответствующий критерий имеется, но он не рассматривается в рамках нашего курса. В примере 2 будет дан частный прием, позволяющий различать вещественные и мнимые квадрики.

К классификации квадрик на проективной плоскости мы вернемся в § 19.

4. Задание квадрики пятью точками.

Теорема. *Каковы бы ни были пять точек проективной плоскости, из которых никакие четыре не коллинеарны, существует единственная квадрика, проходящая через них.*

Доказательство. Сначала покажем, что из данных пяти точек можно выбрать четверку точек, не коллинеарных по три.

Если среди данных точек есть коллинеарная тройка A, B, C, то лишь одна из этих трех точек (например, C) может быть коллинеарна двум оставшимся точкам D и H. Четверка A, B, D, H во всяком случае не содержит коллинеарных троек.

Возьмем систему проективных координат, в которой выбранные точки будут фундаментальными: $E_1\,(1:0:0)$, $E_2\,(0:1:0)$, $E_3\,(0:0:1)$, $E_0\,(1:1:1)$. Координаты оставшейся точки C обозначим $(c_1:c_2:c_3)$.

Теперь будем искать уравнение (т. е. его коэффициенты) вида (15.1), которому удовлетворяли бы координаты всех пяти точек. Подставляя в (15.1) координаты точек E_1, E_2, E_3, получаем $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 0$. Следовательно, уравнение искомой квадрики имеет вид:

$$g_{12}\,x_1x_2 + g_{13}\,x_1x_3 + g_{23}\,x_2x_3 = 0,$$

причем ему должны удовлетворять координаты точек E_0 и C. Поэтому коэффициенты g_{12}, g_{13}, g_{23} должны удовлетворять системе уравнений:

$$\begin{cases} g_{12} + g_{13} + g_{23} = 0, \\ g_{12}\,c_1c_2 + g_{13}\,c_1c_3 + g_{23}\,c_2c_3 = 0. \end{cases}$$

Получилась линейная однородная система с числом уравнений, меньшим числа неизвестных. Следовательно, она имеет ненулевые решения, и это доказывает *существование* квадрики.

Ранг матрицы этой системы:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_1c_3 & c_2c_3 \end{Vmatrix}$$

равен 2, так как из линейной зависимости строк следовало бы, что точка C совпадает с одной из фундаментальных точек E_i, $i = 1, 2, 3, 0$. В самом деле, в этом случае будет $c_1c_2 = c_1c_3 = c_2c_3$, а это может быть только тогда, когда $c_1 = c_2 = c_3$, т. е. $C = E_0$, или когда два числа из тройки (c_1, c_2, c_3) равны нулю, т. е. C совпадает с одной из координатных точек E_i, $i = 1, 2, 3$.

Система, таким образом, имеет единственное (с точностью до множителя) решение:

$$g_{12} : g_{13} : g_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_3 & c_2c_3 \end{vmatrix} : -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_2c_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c_1c_2 & c_1c_3 \end{vmatrix},$$

что и доказывает *единственность* квадрики.

Теорема доказана. В процессе ее доказательства мы нашли уравнение квадрики, проходящей через фундаментальные точки и точку $C\,(c_1 : c_2 : c_3)$:

$$c_3(c_2 - c_1)x_1x_2 + c_2(c_1 - c_3)x_3x_1 + c_1(c_3 - c_2)x_2x_3 = 0. \qquad (15.8)$$

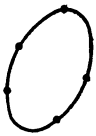

Рис. 51

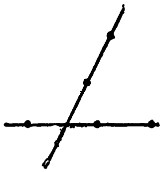

Рис. 52

Если среди данных пяти точек нет коллинеарной тройки, то через них нельзя провести двух прямых. Исходя из классификации квадрик, делаем вывод, что в данном случае пятерка точек определяет овальную квадрику (рис. 51).

Если среди данных точек есть коллинеарная тройка, но нет коллинеарной четверки, то квадрика распадается в две прямые: одна проходит через три коллинеарные точки, а другая — через две оставшиеся (рис. 52).

Случай, когда среди данных точек есть коллинеарная четверка, исключен из теоремы, так как при таком условии нарушается единственность: одна прямая проходит через коллинеарную четверку, а вторую можно провести через пятую точку бесчисленным множеством способов.

Пример 1. *Найдем уравнение квадрики, проходящей через точки* $A\,(0:0:1)$, $B\,(2:1:0)$, $C\,(2:-1:0)$, $D\,(-2:0:1)$, $E\,(2:2:3)$.

Решение. Подставляя координаты данных точек в уравнение (15.1), получаем однородную линейную систему пяти уравнений с шестью неизвестными g_{ij}:

$$\begin{cases} g_{33} = 0, \\ 4g_{11} + g_{22} + 4g_{12} = 0, \\ 4g_{11} + g_{22} - 4g_{12} = 0, \\ 4g_{11} + g_{33} - 4g_{13} = 0, \\ 4g_{11} + 4g_{22} + 9g_{33} + 8g_{12} + 12g_{13} + 12g_{23} = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим ее единственное (с точностью до множителя) решение:

$$g_{33} = g_{12} = g_{23} = 0, \; g_{11} : g_{22} : g_{13} = 1 : -4 : 1.$$

Мы нашли коэффициенты искомого уравнения квадрики, которое имеет следующий вид:

$$x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_1x_3 = 0.$$

Пример 2. *Приведем к каноническому виду уравнение квадрики*

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = 0.$$

Решение. *Первый способ.* Квадратичную форму, стоящую в левой части уравнения, приведем к каноническому виду способом Лагранжа. Имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 = (x_1 - x_3)^2 - x_3^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 = (x_1 - x_3)^2 + (x_2 + x_3)^2 - 2x_3^2.$$

Выполняя преобразование координат по формулам

$$x_1' = x_1 - x_3, \; x_2' = x_2 + x_3, \; x_3' = \sqrt{2}\,x_3,$$

приходим к следующему каноническому уравнению:

$$x_1'^2 + x_2'^2 - x_3'^2 = 0.$$

Второй способ. Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

то ранг матрицы данной квадрики равен 3 и квадрика, следовательно, является невырожденной. Кроме того, ясно, что она проходит через точку $(0:0:1)$ и, значит, является овальной. Каноническое уравнение такой квадрики: $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

Примечание. Первый способ перед вторым имеет то преимущество, что, кроме канонического вида, он позволяет получить и уравнения преобразования координат, при помощи которого уравнение квадрики приводится к каноническому виду.

§ 16. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И КВАДРИКИ. ПОЛЯРЫ И ПОЛЮСЫ

1. Точки пересечения прямой и квадрики. Дадим решение важной для изучения дальнейшего материала задачи о нахождении точки пересечения овальной квадрики G с прямой, проходящей через точки A и B.

Параметрическое уравнение прямой AB по формуле (6.9) имеет вид:

$$X = \alpha A + \beta B.$$

Необходимо определить α и β (вернее, их отношение $\alpha : \beta$) так, чтобы $X \in G$. Для этого надо решить систему:

$$\begin{cases} X^{\mathrm{T}} G X = 0, \\ X = \alpha A + \beta B. \end{cases} \tag{16.1}$$

Подставляя столбец X из второго уравнения в первое, получаем:

$$(\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} G (\alpha A + \beta B) = 0.$$

После этого раскрываем скобки, принимая во внимание равенство $(\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}$:

$$\alpha^2 (A^{\mathrm{T}} G A) + \alpha\beta (A^{\mathrm{T}} G B + B^{\mathrm{T}} G A) + \beta^2 (B^{\mathrm{T}} G B) = 0.$$

Произведения $A^{\mathrm{T}}GA$, $A^{\mathrm{T}}GB$ и т. д. являются матрицами первого порядка, т. е. числами. В самом деле, A^{T} — строка, $A^{\mathrm{T}}G$ тоже строка, а произведение $A^{\mathrm{T}}G \cdot A$ есть произведение строки на столбец, т. е. число. Отметим, что в рамках поставленной задачи все эти числа известны, так как A, B, G даны.

Так как всякая матрица первого порядка симметрична, то

$$A^{\mathrm{T}} G B = (A^{\mathrm{T}} G B)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} G^{\mathrm{T}} A = B^{\mathrm{T}} G A$$

(мы воспользовались также симметричностью матрицы G). Полученное уравнение можно записать в следующем виде:

$$\alpha^2 (A^{\mathrm{T}}GA) + 2\alpha\beta (A^{\mathrm{T}}GB) + \beta^2 (B^{\mathrm{T}}GB) = 0. \qquad (16.2)$$

Решив это уравнение относительно $\alpha : \beta$ (или $\beta : \alpha$), мы подставим найденное значение во второе уравнение системы (16.1) и получим координатный столбец точки пересечения.

Отметим, что уравнение (16.2) не может обратиться в тождество, так как это означало бы, что любая точка прямой AB принадлежит квадрике G, что возможно лишь в случае вырожденной квадрики.

Так как уравнение (16.2) — квадратное относительно $\alpha : \beta$, то возможны три случая взаимного расположения прямой и квадрики в зависимости от знака дискриминанта Δ уравнения (16.2):

1) $\Delta > 0$ — две точки пересечения;

2) $\Delta < 0$ — прямая не имеет общих точек с квадрикой;

3) $\Delta = 0$ — прямая имеет одну общую точку с квадрикой и называется *касательной.*

2. Касательные к квадрике. Условие касания овальной квадрики и прямой, заданных уравнениями (16.1), имеет, как отмечено, вид $\Delta = 0$ или

$$(A^{\mathrm{T}}GB)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)(B^{\mathrm{T}}GB) = 0. \qquad (16.3)$$

Это условие позволяет решить следующую важную задачу: даны овальная квадрика G и точка A; *найти уравнения касательных, проведенных к квадрике из точки A.*

Пусть точка X — произвольная точка какой-либо касательной, проведенной из A (рис. 53). Тогда для прямой AX должно выполняться условие касания (16.3), которое теперь может быть записано в виде:

$$(A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)(X^{\mathrm{T}}GX) = 0. \qquad (16.4)$$

Это и есть *уравнение касательных*, так как ему удовлетворяют все точки касательных и только они. Рассмотрим его подробнее.

$A^{\mathrm{T}}GX$ — линейная форма от трех переменных x_1, x_2, x_3, а ее квадрат — квадратичная; $A^{\mathrm{T}}GA$ — число; $X^{\mathrm{T}}GX$ — квадратичная форма. Таким образом, левая часть уравнения (16.4) есть квадратичная форма, стало быть, это — уравнение квадрики.

В то же время (16.4) есть уравнение касательных. Следовательно, квадрика (16.4) распадается в прямые, а ранг ее матрицы равен 2 или 1.

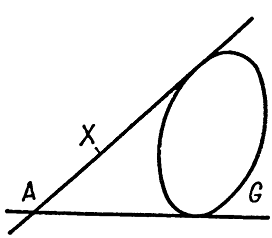

Рис. 53

Рассмотрим два случая взаимного расположения точки и квадрики.

1. $A \in G$. В этом случае $A^{\mathrm{T}}GA = 0$ и, следовательно, уравнение (16.4) принимает вид $(A^{\mathrm{T}}GX)^2 = 0$, а квадрика (16.4) есть дважды взятая прямая, уравнение которой

$$A^{\mathrm{T}}GX = 0. \qquad (16.5)$$

Мы получили *уравнение касательной к квадрике G в ее точке A.*

2. $A \notin G$. В этом случае $A^{\mathrm{T}}GA \neq 0$. Покажем, что ранг квадрики (16.4) равен 2. Предположим противное: пусть этот ранг равен 1. Тогда уравнение (16.4) можно записать в виде (15.7):

$$(A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)(X^{\mathrm{T}}GX) = (uX)^2,$$

откуда:

$$X^{\mathrm{T}}GX = \frac{1}{A^{\mathrm{T}}GA}((A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (uX)^2)$$

или

$$X^{\mathrm{T}}GX = \frac{1}{A^{\mathrm{T}}GA}(A^{\mathrm{T}}GX - uX)\ (A^{\mathrm{T}}GX + uX).$$

Мы получили разложение квадратичной формы $X^{\mathrm{T}}GX$ на линейные множители, что противоречит условию задачи, по которому квадрика G овальная.

Итак, в рассматриваемом случае квадрика (16.4) есть либо пара прямых, либо пара мнимых прямых. В первом случае существуют две касательные, во втором касательных нет.

Найти уравнения касательных по отдельности можно, разложив на множители левую часть уравнения (16.4), т. е. представив его в виде (15.6):

$$(A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)(X^{\mathrm{T}}GX) = (uX)(vX).$$

Это позволит найти искомые касательные u и v (рис. 54).

Найти касательные u и v можно и другим путем, определив предварительно точки касания. Если X — точка касания, то ее координаты удовлетворяют и уравнению квадрики G, и уравнению касательных:

$$\begin{cases} X^{\mathrm{T}}GX = 0, \\ (A^{\mathrm{T}}GX)^2 - (A^{\mathrm{T}}GA)(X^{\mathrm{T}}GX) = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна следующей:

$$\begin{cases} X^{\mathrm{T}}GX = 0, \\ A^{\mathrm{T}}GX = 0. \end{cases} \tag{16.6}$$

Решив ее, найдем точки касания X_1 и X_2, а затем и сами касательные $u = (AX_1)$ и $v = (AX_2)$.

Определение. Точка называется *внешней* по отношению к квадрике, если из нее можно провести к этой квадрике две касательные, и *внутренней*, если таких касательных нет.

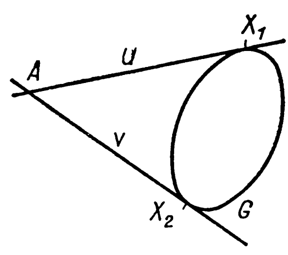

Рис. 54

3. Определение поляр и полюсов.

Определение. Пусть G — овальная квадрика, A и B — не лежащие на ней точки, K и L — точки пересечения прямой AB с квадрикой G. Если $(ABKL) = -1$, то

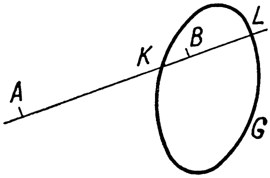

Рис. 55

говорят, что квадрика G *гармонически разделяет* пару точек A и B или что точки A и B *гармонически сопряжены* относительно квадрики G (рис. 55).

Выведем условие гармонической сопряженности точек A и B относительно квадрики G. Имеем:

$$K = \alpha' A + \beta' B,\ L = \alpha'' A + \beta'' B,$$

причем $\beta' : \alpha'$ и $\beta'' : \alpha''$ — корни уравнения (16.2). По определению гармонической сопряженности запишем:

$$(ABKL) = \frac{\beta'}{\alpha'} : \frac{\beta''}{\alpha''} = -1,$$

откуда:

$$\frac{\beta'}{\alpha'} + \frac{\beta''}{\alpha''} = 0,$$

т. е. сумма корней уравнения (16.2) равна нулю. Поэтому в силу теоремы Виета условие гармонической сопряженности точек A и B относительно квадрики G имеет вид:

$$A^{\mathrm{T}} G B = 0. \tag{16.7}$$

Отметим, что все точки X, гармонически сопряженные относительно квадрики G с фиксированной точкой $A \notin G$, расположены на прямой (рис. 56, 57), так как из (16.7) следует равенство

$$A^{\mathrm{T}} G X = 0, \tag{16.8}$$

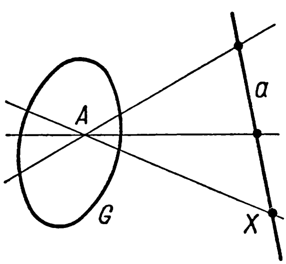

Рис. 56

а это — уравнение первой степени. Такая прямая называется полярой точки A.

Здесь не определены поляры точек, принадлежащих квадрике. Приведем полное определение поляр.

Определение. *Полярой* точки A относительно овальной квадрики G называется прямая a, которая в случае $A \notin G$ содержит все точки, гармонически сопряженные с A относительно G, а в случае $A \in G$ касается G в точке A.

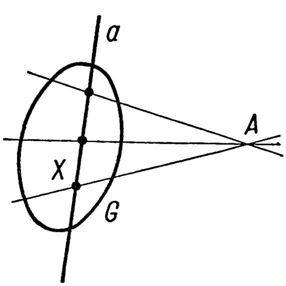

Рис. 57

Если $A \notin G$, то уравнение поляры имеет вид (16.8), а если $A \in G$, то (16.5). Оба эти уравнения формально совпадают. Поэтому во всех случаях уравнение

$$A^{\mathrm{T}} G X = 0 \tag{16.9}$$

является *уравнением поляры* точки A относительно овальной квадрики G.

Уравнение поляры a, как уравнение всякой прямой, может быть записано в виде

$aX = 0$ (см. (6.7)), где a — координатная строка поляры. Сравнивая это с (16.9), имеем:

$$\mu a = A^{\mathrm{T}} G, \tag{16.10}$$

где μ — коэффициент пропорциональности.

Это уравнение может быть разрешено относительно A:

$$\lambda A = G^{-1} a^{\mathrm{T}}, \tag{16.11}$$

следовательно, какова бы ни была прямая a и овальная квадрика G, существует единственная точка A, для которой прямая a является полярой относительно G.

Определение. Точка A, для которой данная прямая a является полярой относительно овальной квадрики G, называется *полюсом* прямой a относительно G.

Координаты полюса определяются уравнением (16.11).

4. Свойства полюсов и поляр. Полярная корреляция.

Свойство 1. *Если точка и прямая инцидентны, то их поляра и полюс тоже инцидентны.*

Обозначая данные точку и прямую через A и b соответственно, а их поляру и полюс — через a и B, можем записать доказываемое свойство следующим образом:

$$A \in b \Leftrightarrow a \ni B.$$

Условие инцидентности A и b в силу (6.7) имеет вид $bA = 0$, условие инцидентности a и B — $aB = 0$. По формулам (16.10) и (16.11) имеем:

$$\mu a = A^{\mathrm{T}} G, \quad \lambda B = G^{-1} b^{\mathrm{T}},$$

поэтому

$$aB = \frac{1}{\mu\lambda} (A^{\mathrm{T}} G)(G^{-1} b^{\mathrm{T}}) = \frac{1}{\mu\lambda} A^{\mathrm{T}} b^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\mu\lambda} (bA)^{\mathrm{T}}.$$

Следовательно, aB и bA обращаются в нуль одновременно, что и требовалось доказать.

Свойство 2. *Если точка A — внешняя по отношению к квадрике G, то ее поляра a проходит через точки касания касательных, проведенных из A к квадрике* (рис. 58).

В самом деле, координаты точек касания X_1 и X_2 определяются системой (16.6). Но первое из уравнений этой системы есть уравнение квадрики, второе — уравнение поляры точки A, значит, точки X_1 и X_2 — это точки пересечения квадрики с полярой.

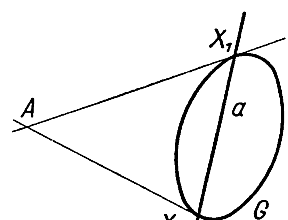

Рис. 58

Определение. Отображение $\sigma_G : \boldsymbol{P}_2 \to \boldsymbol{P}_2$, при котором образом каждой точки является ее поляра, а образом прямой — полюс относительно овальной квадрики G, называется *полярной корреляцией*.

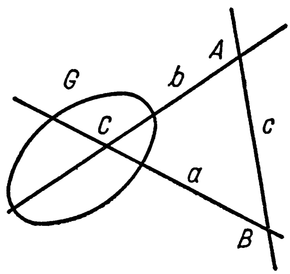

Рис. 59

Мы опускаем доказательство того факта, что полярная корреляция является корреляцией в смысле определения, данного в § 13, п. 1.

Полярная корреляция была использована Понселе[1] для обоснования принципа двойственности.

5. Автополярный трехвершинник и его связь с задачей приведения уравнения квадрики к каноническому виду.

Определение. Трехвершинник называется *автополярным* относительно некоторой овальной квадрики, если каждая его вершина является полюсом противоположной стороны.

Очевидно, что это определение равносильно следующему: трехвершинник называется *автополярным* относительно квадрики G, если при полярной корреляции σ_G он отображается на себя.

Каждая квадрика имеет бесконечное множество автополярных трехвершинников. Покажем это.

Пусть имеется квадрика G. Возьмем произвольную точку $A \notin G$ и ее поляру a (рис. 59). На этой поляре возьмем произвольную точку $B \notin G$ и обозначим через b ее поляру. По свойству 1 (пункт 4) из $B \in a$ следует, что $b \ni A$. По тому же свойству точка $C = a \cap b$ является полюсом прямой $c = (AB)$.

Трехвершинник ABC — автополярный.

Теорема. *Для того чтобы уравнение овальной квадрики не содержало членов с произведением координат* (т. е. чтобы матрица квадрики была диагональной), *необходимо и достаточно, чтобы координатный трехвершинник был автополярным относительно данной квадрики.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть уравнение квадрики G имеет вид:

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0.$$

Найдем поляру e_1 координатной точки E_1 $(1:0:0)$. По формуле (16.10) получаем:

$$\mu e_1 = E_1^{\mathrm{T}} G = \|1,\ 0,\ 0\| \cdot \begin{Vmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{Vmatrix} = \|\alpha,\ 0,\ 0\|.$$

Значит, уравнение прямой e_1 имеет вид $\alpha x_1 = 0$. Это, следовательно, координатная прямая E_2E_3.

Аналогично убеждаемся, что полярами других вершин координатного трехвершинника тоже будут его стороны.

Достаточность. Пусть теперь координатный трехвершинник

[1] Жан Виктор Понселе (1788—1867) — французский инженер и математик, один из создателей проективной геометрии, четко разграничивший проективные и метрические свойства фигур.

$E_1E_2E_3$ автополярен относительно квадрики G. Тогда для его сторон e_i имеем:

$$\mu e_i = E_i^{\mathrm{T}} G, \quad i = 1, 2, 3.$$

Отсюда при $i = 1$ получим:

$$\mu e_1 = \| 1, 0, 0 \| \cdot \begin{Vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{Vmatrix} = \| g_{11}, \ g_{12}, \ g_{13} \|,$$

где $\|g_{jk}\| = G$. А так как прямая e_1 имеет координаты $(1 : 0 : 0)$, то $g_{12} = g_{13} = 0$. Полагая $i = 2$, получим $g_{23} = 0$. Теорема доказана.

6. Полярные свойства полного четырехвершинника, вписанного в квадрику. Полный четырехвершинник называется *вписанным* в квадрику, если его вершины лежат на квадрике. Приводимая ниже теорема используется при выполнении различных построений, связанных с полюсами и полярами.

Теорема. *Диагональный трехвершинник полного четырехвершинника, вписанного в овальную квадрику, является автополярным относительно этой квадрики.*

Доказательство. Пусть G — данная квадрика и A, B, C, $D \in G$ — вершины полного четырехвершинника (рис. 60). Тогда трехвершинник PQR, где

$$P = (AB) \cap (CD), \ Q = (AC) \cap (BD), \ R = (AD) \cap (BC),$$

—диагональный. Требуется доказать, что он автополярен относительно G.

Обозначим поляры вершин этого трехвершинника соответственно через p, q, r. Надо доказать, что $p = (QR)$, $q = (PR)$, $r = (PQ)$. Ограничимся доказательством одного из этих равенств, например второго. Остальные доказываются аналогично.

По теореме о гармонических свойствах полного четырехвершинника

$$(ACQZ) = (BDQT) = -1,$$

где

$$T = (PR) \cap (BD), \ Z = (PR) \cap (AC).$$

Значит, точки T и Z гармонически сопряжены с точкой Q и, следовательно, лежат на ее поляре. Поэтому $(TZ) = (PR) = q$, что и требовалось доказать.

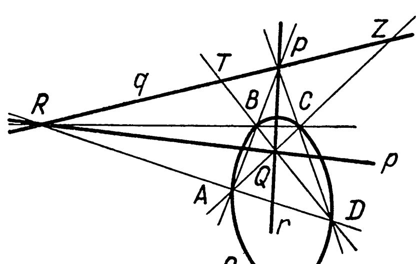

Рис. 60

Если четырехвершинник на рисунке 60 подвергнуть полярной корреляции σ_G, то он перейдет в описанный четырехсторонник (почему?), а диагональный трехвершинник — в себя. Получаем двойственную теорему, которую читателю предлагается сформулировать самостоятельно.

Пример 1. *Найдем поляру точки* A $(1 : 3 : -1)$ *относительно квадрики* G, *имеющей уравнение* $x_1^2 - 2x_2^2 + 4x_2x_3 = 0$.

Решение. Координаты искомой поляры a определяем по формуле (16.10):

$$\mu a = A^{\mathrm{T}} G = \|1,\ 3,\ -1\| \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{Vmatrix} = \|1,\ -8,\ 6\|.$$

Уравнение искомой прямой $a : x_1 - 8x_2 + 6x_3 = 0$.

Пример 2. *Найдем полюс прямой* a $(0 : -1 : 2)$ *относительно квадрики* G, *имеющей уравнение* $x_2^2 + 4x_1 x_3 = 0$.

Решение. Так как

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

то по формуле (16.11)

$$\lambda A = G^{-1} a^{\mathrm{T}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Итак, A $(1 : -1 : 0)$.

Пример 3. *Даны овальная квадрика* G *и точка* $A \notin G$. *Построим поляру данной точки.*

Решение. *Первый способ.* Исходим из определения поляры, приведенного в пункте 3. На двух произвольных секущих, проходящих через точку A, строим точки B_1 и B_2, гармонически сопряженные с A относительно квадрики G (рис. 61, 62); такое построение описано в § 10, п. 3. По определению прямая $a = (B_1B_2)$ — поляра точки A.

Второй способ. Исходим из теоремы о полярных свойствах вписанного четырехвершинника (пункт 6). Через точку A проводим произвольно две прямые, пересекающие квадрику в точках X, Y и Z, T. Диагональ четырехвершинника $XYZT$, проходящая через диагональ-

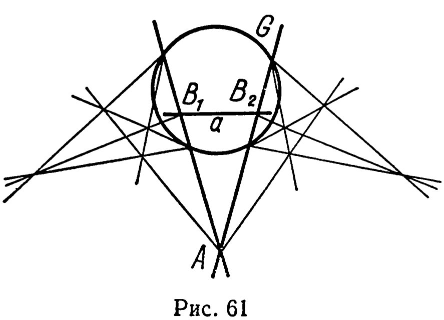

Рис. 61

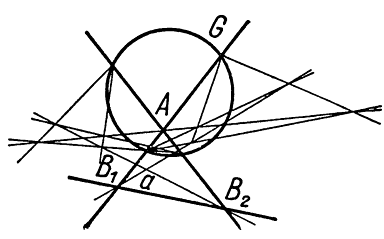

Рис. 62

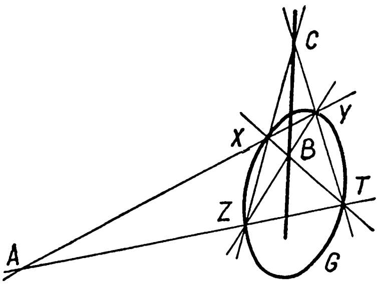

Рис. 63

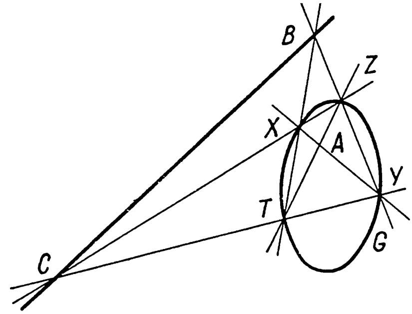

Рис. 64

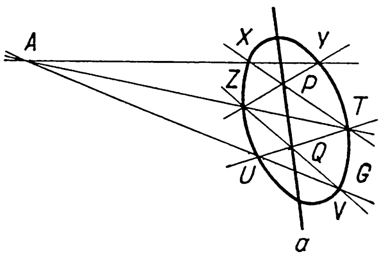

Рис. 65

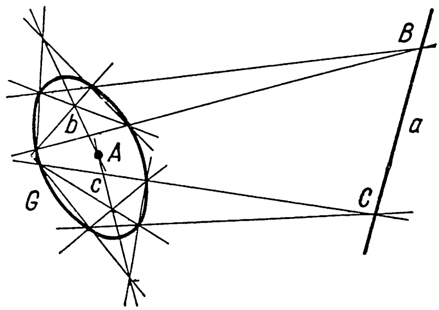

Рис. 66

ные точки $B = (XT) \cap (YZ)$ и $C = (XZ) \cap (YT)$, есть искомая поляра (рис. 63, 64).

Третий способ. Через точку A проводим три секущие, пересекающие квадрику в точках X и Y, Z и T, U и V (рис. 65). На основании теоремы о полярных свойствах вписанного четырехвершинника, отнесенной к четырехвершиннику $XYZT$, делаем вывод, что точка $P = (XT) \cap (ZY)$ лежит на поляре a точки A. Аналогично $Q \in a$, где $Q = (ZV) \cap (UT)$. Следовательно, $a = (PQ)$ — искомая поляра.

Пример 4. *Даны овальная квадрика G и внешняя точка A. Построим касательные из A к G.*

Решение. Строим прямую a — поляру точки A (см. рис. 58), точки ее пересечения с квадрикой обозначим через X_1 и X_2. Согласно свойству 2 (пункт 4) прямые AX_1 и AX_2 — искомые касательные.

Пример 5. *Даны овальная квадрика G и прямая a. Построим полюс прямой a.*

Решение. Берем произвольно точки B, $C \in a$ и строим их поляры b и c. По свойству 1 (пункт 4) из B, $C \in a$ следует, что $b, c \ni A$, где A — искомый полюс (рис. 66).

Пример 6. *Даны овальная квадрика G и точка $A \in G$. Построим поляру точки A.*

Решение. Через A проводим произвольную прямую u и строим ее полюс U (см. предыдущий пример). Прямая $a = (AU)$ — искомая (почему?).

§ 17. ТЕОРЕМЫ ПАСКАЛЯ[1] И БРИАНШОНА[2]

1. Теорема Паскаля. Как известно, пять точек определяют квадрику. Рассмотрим теорему Паскаля, выражающую необходимое и достаточное условие того, что шесть точек принадлежат квадрике. В другом виде это условие дается теоремой Штейнера[3], которая здесь не приводится. В «доаналитический» период развития проективной геометрии эти теоремы заменяли уравнение квадрики. Но даже и теперь, когда аналитические методы в проективной геометрии распространились очень широко, они не потеряли своего значения, ибо позволяют в ряде случаев легко устанавливать такие свойства квадрик, которые при аналитическом подходе усмотреть не просто.

При рассмотрении теоремы Паскаля, для того чтобы исключить тривиальный случай, будем требовать, чтобы в данной шестерке точек не было коллинеарных троек. В самом деле, квадрика, содержащая три коллинеарные точки, вырожденная, поэтому, для того чтобы шесть таких точек лежали на квадрике, необходимо и достаточно, чтобы данные шесть точек были инцидентны одной или двум прямым.

Определение. Совокупность шести различных упорядоченных точек A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, называемых *вершинами*, и шести различных прямых A_1A_2, A_2A_3, ..., A_6A_1, называемых *сторонами*, называется *шестивершинником*. Стороны A_1A_2 и A_4A_5, A_2A_3 и A_5A_6, A_3A_4 и A_6A_1 называются *противоположными*, так же как и вершины A_1 и A_4, A_2 и A_5, A_3 и A_6 (рис. 67). Шестивершинник называется *вписанным в квадрику* или *паскалевым*, если все его вершины принадлежат квадрике.

Теорема. *Для того чтобы шесть точек, из которых никакие три не коллинеарны, принадлежали одной квадрике, необходимо и достаточно, чтобы противоположные стороны шестивершинника, вер-*

---

[1] Блэз Паскаль (1623—1662) — выдающийся французский физик, математик и философ. Глубоко усвоив идеи Дезарга, он открыл излагаемую здесь теорему в шестнадцатилетнем возрасте.

[2] Шарль Жюльен Брианшон (1785—1864) — французский геометр.

[3] Якоб Штейнер (1796—1863) — немецкий математик, развивший проективную геометрию на основе проективного соответствия прямых и пучков. Интересный факт биографии: сын крестьянина, Штейнер на девятнадцатом году жизни едва умел писать.

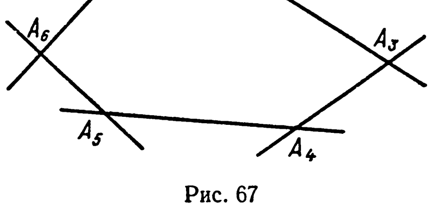

Рис. 67

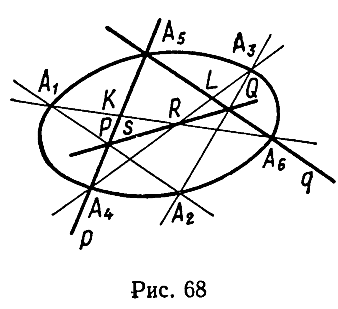

Рис. 68

шинами которого являются данные точки, пересекались в трех точках, лежащих на одной прямой (*паскалева прямая*).

Доказательство. Данные точки обозначим через A_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$, и первые четыре из них примем за фундаментальные точки системы координат:

$$A_1\,(1:0:0),\ A_2\,(0:1:0),\ A_3\,(0:0:1),\ A_4\,(1:1:1).$$

Введем также обозначения для координат оставшихся двух точек:

$$A_5\ (c_1 : c_2 : c_3),\ \ A_6\,(d_1 : d_2 : d_3).$$

Согласно уравнению (15.8), для того чтобы все эти шесть точек лежали на одной квадрике, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$c_3\,(c_2 - c_1)d_1d_2 + c_2\,(c_1 - c_3)\,d_3d_1 + c_1\,(c_3 - c_2)\,d_2d_3 = 0. \qquad (17.1)$$

Теперь найдем условие, при котором точки

$$P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5),\ Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6),\ R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$$

пересечения противоположных сторон шестивершинника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ лежат на одной прямой (рис. 68). Для этого находим уравнения всех сторон шестивершинника и решаем совместно уравнения противоположных сторон. Получаем:

$$P\,(c_1 - c_3 : c_2 - c_3 : 0),\ Q\,(0 : c_1d_2 - c_2d_1 : c_1d_3 - c_3d_1),\ R\,(d_2 : d_2 : d_3).$$

Вследствие условия (6.4) для коллинеарности этих точек необходимо и достаточно выполнение следующего условия:

$$\begin{vmatrix} c_1 - c_3 & c_2 - c_3 & 0 \\ 0 & c_1d_2 - c_2d_1 & c_1d_3 - c_3d_1 \\ d_2 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что это условие равносильно (17.1)

Теорема доказана.

За счет некоторого усложнения формулировки и доказательства теорему Паскаля можно было бы обобщить таким образом, чтобы теорема Паппа[1] могла рассматриваться как ее частный случай.

2. Предельные случаи теоремы Паскаля. Предположим, что одна из вершин шестивершинника Паскаля, перемещаясь по квадрике, стремится к другой вершине, причем обе вершины имеют соседние номера и, следовательно, лежат на одной стороне шестивершинника. Если, например, A_2 стремится к A_1, то сторона A_1A_2 имеет своим пределом касательную к квадрике в точке A_1. Фигуру, которая при этом получается из паскалева шестивершинника (она состоит из пяти точек и шести прямых), будем называть *предельным шестивершинником*; в дальнейшем встретятся и другие виды предельных шестивершинников. Если вершину, в которой слились две вершины (двойную вершину), обозначить двумя (соседними!) номерами, то обозначение

[1] Теорему Паппа часто называют теоремой Паскаля — Паппа.

предельного шестивершинника не будет отличаться от обозначения обычного.

Применяя предельный переход разное число раз, мы можем получить предельные шестивершинники с четырьмя и тремя вершинами (рис. 69—72, обратите внимание на обозначение сторон, проходящих через двойные точки). Мы приведем только одну формулировку, соответствующую одному предельному переходу (см. рис. 69).

Т е о р е м а. *Пусть даны пять точек, из которых никакие три не коллинеарны, и прямая, проходящая через одну и только одну из них. Для того чтобы прямая касалась квадрики, определяемой данными пятью точками, необходимо и достаточно, чтобы для предельного шестивершинника, определяемого данными точками и прямой, выполнялись требования теоремы Паскаля.*

3. Теорема Брианшона и ее предельные случаи. Рассмотрим теорему, двойственную теореме Паскаля.

Фигурой, двойственной шестивершиннику, является опять шестивершинник. Поэтому термин «шестисторонник» мы употреблять не будем.

К фигуре, представленной на рисунке 68, иллюстрирующем теорему Паскаля, применим полярную корреляцию σ_G относительно квадрики G. Тогда вершины A_i вписанного шестивершинника отобразятся

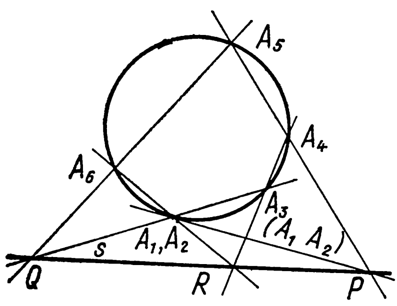

Рис. 69

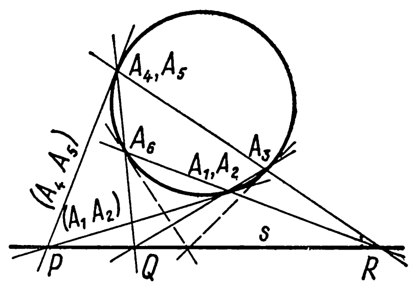

Рис. 70

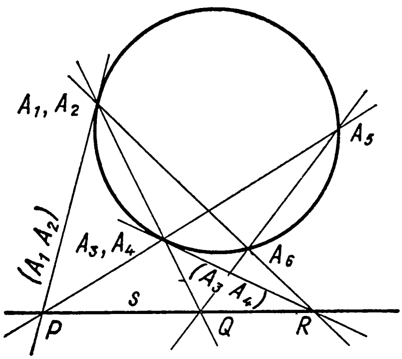

Рис. 71

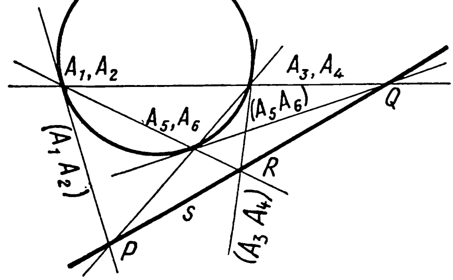

Рис. 72

на касательные a_i к квадрике, а стороны A_1A_2, ..., A_6A_1 — на точки пересечения этих касательных; эти точки с целью сохранения единства обозначений будем обозначать (a_1a_2), ..., (a_6a_1). Шестивершинник, стороны которого касаются квадрики, называется описанным. Таким образом, полярная корреляция σ_G отображает шестивершинник, вписанный в квадрику G, на описанный.

Точки P, Q, R, в которых пересекаются противоположные стороны вписанного шестивершинника, отображаются на прямые p, q, r, проходящие через противоположные вершины описанного шестивершинника, а паскалева прямая s, на которой лежат точки P, Q R, отображается на точку Брианшона S, через которую проходят прямые p, q, r (рис. 73).

Сформулируем теорему Брианшона.

Теорема. *Для того чтобы шесть прямых, среди которых нет трех, принадлежащих одному пучку, касались одной квадрики, необходимо и достаточно, чтобы три прямые, соединяющие противоположные вершины шестивершинника, сторонами которого являются данные прямые, пересекались в одной точке (точка Брианшона).*

Предельные случаи теоремы Брианшона могут быть получены двумя способами. Во-первых, они двойственны теоремам, выражающим предельные случаи теоремы Паскаля. Во-вторых, их можно получить путем предельного перехода из самой теоремы Брианшона. При этом надо только иметь в виду, что при слиянии двух касательных a_1 и a_2 к квадрике точка их пересечения (a_1a_2) имеет своим пределом точку касания.

Мы не будем подробно останавливаться на этих предельных случаях. Ограничимся рассмотрением чертежей (рис. 74—77), на которых изображены предельные описанные шестивершинники, имеющие по шесть вершин, но только пять, четыре или три стороны. Во всех случаях используются обозначения, введенные на рисунке 73.

Пример 1. *Даны пять точек квадрики. Построим какую-либо шестую.*

Решение. Исключая тривиальное построение, рассмотрим случай, когда среди данных точек нет коллинеарных троек, т. е. случай овальной квадрики.

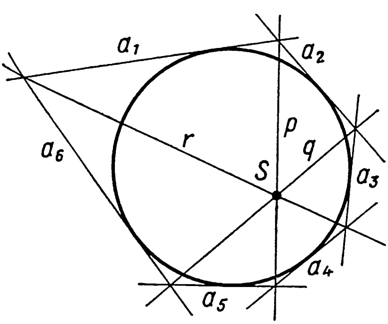

Рис. 73

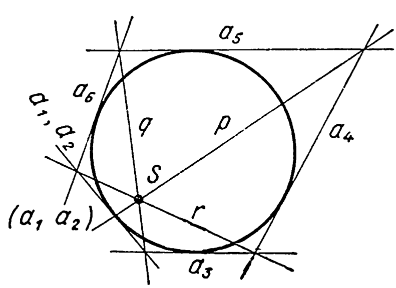

Рис. 74

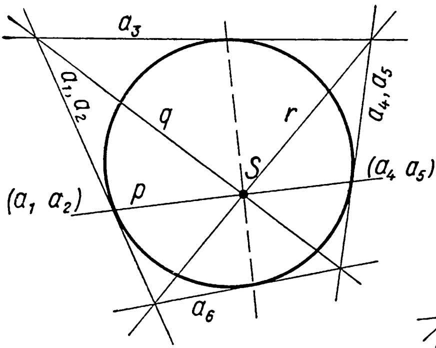

Рис. 75

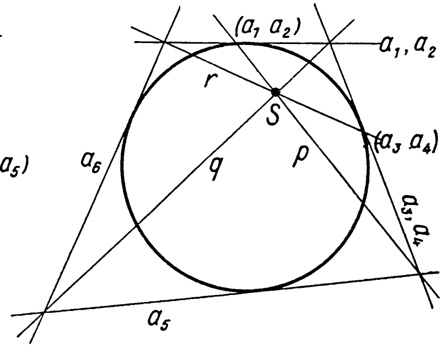

Рис. 76

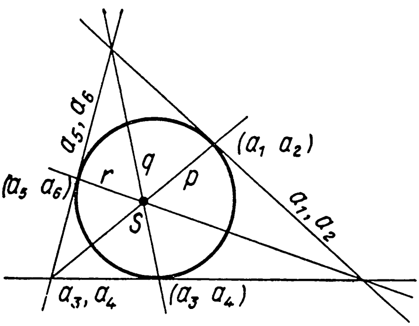

Рис. 77

Обозначив данные точки через A_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, примем их за вершины паскалева шестивершинника, шестая вершина A_6 которого неизвестна. Из трех точек

$$P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5),$$
$$Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6),$$
$$R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$$

паскалевой прямой s известна только точка P, остальные зависят от неизвестной точки A_6. Проведем прямую s через P произвольно и вернемся к построению точек Q и R (рис. 78). Теперь они легко находятся: $Q = (A_2A_3) \cap s$, $R = (A_3A_4) \cap s$, поэтому можно построить две неизвестные стороны шестивершинника:

$$(A_5A_6) = (A_5Q),\ (A_6A_1) = (A_1R).$$

Искомая точка A_6 является точкой пересечения этих сторон.

Выбирая паскалеву прямую другим способом, можно получить другие точки, лежащие на квадрике.

Пример 2. *Даны пять точек овальной квадрики. Построим в одной из них касательную к квадрике.*

Решение. Данные точки примем за вершины A_i паскалева шестивершинника, причем ту, в которой нужно провести касательную,— за двойную (например, за A_1, A_2). Остальные вершины обозначаем оставшимися буквами произвольно (рис. 79). Таким образом, в предельном шестивершиннике известны все вершины и пять сторон, не известна только сторона A_1A_2, она как раз и является искомой касательной.

Строим точки паскалевой прямой

$$Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6),\ R = (A_3A_4) \cap (A_6A_1),$$

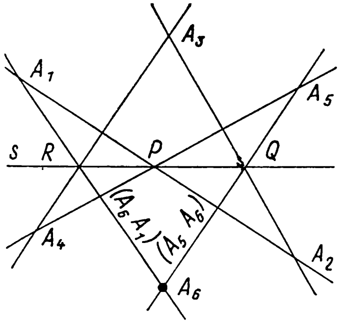

Рис. 78

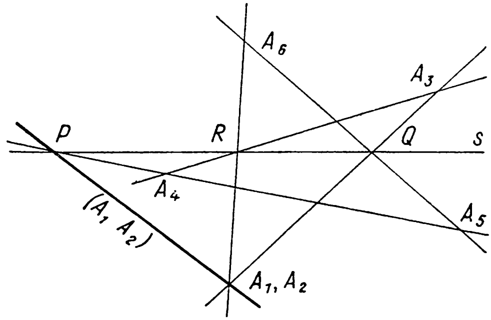

Рис. 79

а по ним и саму паскалеву прямую s. Так как $P=(A_1A_2)\cap(A_4A_5)\in\in s$, то точку P можно построить как точку пересечения паскалевой прямой с известной стороной (A_4A_5). Теперь строим искомую касательную $(A_1A_2)=(A_1P)$.

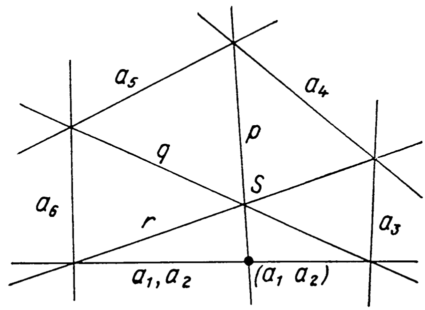

Рис. 80

Пример 3. *Даны пять касательных к овальной квадрике. Построим точку касания одной из них.*

Настоящий пример двойствен по отношению к предыдущему. Его решение основано на теореме Брианшона.

Решение. Данные прямые примем за стороны a_i шестивершинника, причем ту, точку касания которой надо найти, — за двойную (например, за a_1, a_2). Остальные стороны обозначаем оставшимися буквами произвольно (рис. 80). Таким образом, в предельном шестивершиннике известны все стороны и пять вершин, не известна только вершина (a_1a_2), она как раз и является искомой точкой касания.

Строим прямые q и r, соединяющие противоположные вершины шестивершинника (a_2a_3) и (a_5a_6), (a_3a_4) и (a_6a_1) соответственно, а по ним — точку Брианшона $S=q\cap r$. Так как эта точка лежит на прямой p, соединяющей известную вершину (a_4a_5) с искомой (a_1a_2), то можно построить прямую p, а затем и искомую точку $(a_1a_2)=a_1\cap p$.

§ 18. КВАДРИКИ НА РАСШИРЕННОЙ ЕВКЛИДОВОЙ ПЛОСКОСТИ

1. Аффинная классификация квадрик. В § 7, п. 4 мы уже имели дело с квадриками на расширенной плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$. Мы видели, что эллипс не имеет несобственных точек, парабола касается несобственной прямой в несобственной точке своей оси, а гипербола пересекает несобственную прямую в двух точках — несобственных точках своих асимптот. Эти результаты могут быть использованы для классификации квадрик на нерасширенной плоскости $\boldsymbol{R}_2$.

Пусть дано уравнение квадрики на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ в аффинных координатах:

$$g_{11}x^2 + 2g_{12}xy + g_{22}y^2 + 2g_{13}\,x + 2g_{23}y + g_{33} = 0.$$

Коэффициенты этого уравнения могут быть любыми числами, если старшие коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} не равны нулю одновременно.

В данном уравнении выполним переход к однородным аффинным координатам по формулам (7.2). В результате получится квадрика G на плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$. Уравнение этой квадрики имеет вид:

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 + 2g_{13}x_1x_3 + 2g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 = 0.$$

Квадрика G может отличаться от данной только несобственными точками. Найдем их количество. С этой целью решаем совместно уравнение квадрики G с уравнением несобственной прямой $x_3 = 0$. Получаем:

$$g_{11}x_1^2 + 2g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0.$$

Это — квадратное уравнение относительно $x_1 : x_2$ (или $x_2 : x_1$), число решений которого зависит от знака дискриминанта $\Delta = g_{12}^2 - g_{11}g_{22}$. При $\Delta > 0$ несобственных точек две (гипербола или пара пересекающихся вещественных прямых), при $\Delta = 0$ — одна (парабола или пара параллельных прямых, которые, в частности, могут совпадать); при $\Delta < 0$ квадрика не имеет несобственных точек (эллипс или пара мнимых пересекающихся прямых).

Теперь с учетом проективной классификации квадрик получаем более детальную классификацию квадрик на плоскости $\boldsymbol{R}_2$, называемую *аффинной* и изучавшуюся в предыдущих разделах курса геометрии. Она приведена в следующей таблице:

Ранг	Знак Δ	Аффинный класс	Проективный класс
3	Минус	Мнимый эллипс	Нулевая квадрика
		Эллипс	Овальная квадрика
	Нуль	Парабола	
	Плюс	Гипербола	
2	Минус	Пара мнимых пересекающихся прямых	Пара мнимых прямых
	Нуль	Пара мнимых параллельных прямых	
		Пара параллельных прямых	Пара прямых
	Плюс	Пара пересекающихся прямых	
1	Нуль	Пара совпавших прямых	Пара совпавших прямых

2. Центр квадрики. Центр квадрики обычно определяется как точка, в которой делятся пополам все проходящие через нее хорды. На евклидовой плоскости $\boldsymbol{R}_2$ эллипс и гипербола имеют центр, а парабола — нет.

Перейдем теперь к расширенной евклидовой плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$. Всякая точка, гармонически сопряженная с центром эллипса или гиперболы относительно этой квадрики, — это несобственная точка (см. теорему § 4, п. 2). Отсюда в силу определения поляры следует, что *полярой центра является несобственная прямая.* Это дает основание для следующего определения.

Определение. *Центром* овальной квадрики называется полюс несобственной прямой.

Это определение, как следует из предшествующих ему рассуждений, для эллипса и гиперболы равносильно обычному определению, приведенному в начале пункта. Но его можно применить и к параболе. Несобственная прямая, как отмечалось, касается параболы в несобственной точке C_∞, которая поэтому и является полюсом несобственной прямой. Следовательно, *центр параболы находится в ее несобственной точке.* Это не противоречит известному факту, что на нерасширенной плоскости $\boldsymbol{R}_2$ парабола центра не имеет, так как $C_\infty \notin \boldsymbol{R}_2$.

Теперь легко находятся координаты центра C любой овальной квадрики G в однородной аффинной системе координат. С помощью формулы (16.11) находим:

$$\lambda C = G^{-1}a_\infty^{\mathrm{T}}, \tag{18.1}$$

где a_∞ — координатная строка несобственной прямой a_∞ $(0 : 0 : 1)$.

3. Диаметры квадрики. Диаметр квадрики на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ обычно определяется как множество середин параллельных хорд. Доказывается, что все середины лежат на прямой. Удобно называть диаметром всю эту прямую (рис. 81).

На расширенной евклидовой плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ середины параллельных хорд гармонически сопряжены относительно квадрики с одной и той же несобственной точкой P_∞, через которую проходят все параллельные хорды. Значит, диаметр p есть поляра точки P_∞. В связи с этим примем следующее определение.

Определение. *Диаметром* овальной квадрики называется поляра несобственной точки.

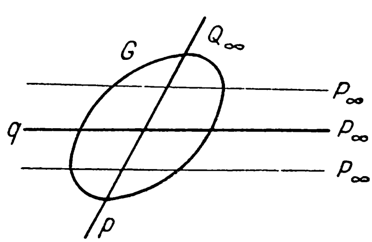

Рис. 81

Так как $P_\infty \in a_\infty$, то поляра p точки P_∞ и полюс C прямой a_∞ будут инцидентными, т. е. диаметр квадрики всегда проходит через центр. Это, между прочим, означает, что в случае параболы, у которой центр является несобственным, все диаметры парал-

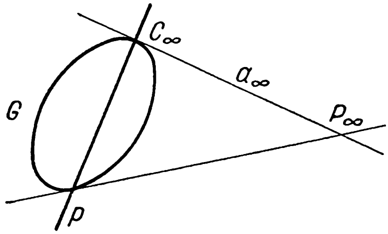

Рис. 82

лельны. Несобственная прямая тоже диаметр параболы.

Возьмем на диаметре p несобственную точку Q_∞. Так как $Q_\infty \in p$, то $q \ni P_\infty$, т. е. поляра точки Q_∞ (диаметр q) проходит через точку P_∞ (см. рис. 81).

Диаметр p делит пополам все параллельные хорды, проходящие через точку Q_∞, а диаметр q — хорды, проходящие через P_∞. Диаметры, обладающие таким свойством, называются сопряженными. Теперь это понятие удобно определить в терминах проективной геометрии.

Определение. Два диаметра квадрики называются *сопряженными*, если каждый из них проходит через полюс другого.

Легко видеть, что в случае параболы каждый диаметр сопряжен с несобственным ее диаметром. В самом деле, каждый собственный диаметр p параболы имеет одну несобственную точку — центр параболы C_∞. Следовательно, он сопряжен с полярой этой точки, а ею является несобственная прямая a_∞; эта ситуация условно изображена на рисунке 82.

На нерасширенной плоскости $\boldsymbol{R}_2$ диаметры параболы не имеют сопряженных.

4. Асимптоты квадрики. В § 7, п. 4 было уже установлено, что гипербола $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} - x_3^2 = 0$ имеет несобственные точки K_∞ $(a : b : 0)$ и L_∞ $(a : -b : 0)$. Найдем по формуле (16.5) касательные к гиперболе в этих точках. Для точки K_∞ имеем:

$$\|a,\ b,\ 0\| \cdot \left\|\begin{matrix} \frac{1}{a^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix}\right\| = 0$$

или

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0.$$

Переходя к неоднородным координатам, получаем уравнение асимптоты $y = \frac{b}{a}x$. Аналогично обстоит дело и с касательной в точке L_∞.

Дадим следующее определение.

Определение. *Асимптотой* квадрики называется касательная к ней в ее несобственной точке.

Эллипс несобственных точек не имеет и потому не имеет асимптот. Асимптотой параболы на расширенной плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ является несобственная прямая, на плоскости $\boldsymbol{R}_2$ у параболы асимптот нет.

Несобственные точки K_∞ и L_∞ гиперболы инцидентны несобственной прямой a_∞, поэтому их поляры k и l пересекаются в полюсе C несобственной прямой, т. е. асимптоты гиперболы пересекаются в ее центре (см. условный рис. 83).

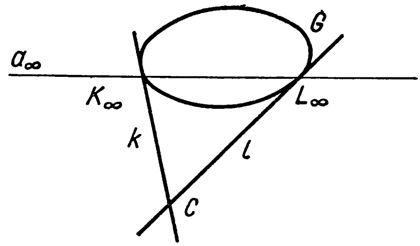

Рис. 83

Пример. 1 *Дана квадрика G своим уравнением в аффинных координатах*:

$$x^2 - 6xy + 8y^2 + 2y = 0.$$

Найдем ее аффинный класс.

Решение. Система:

$$\begin{cases} x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 + 2x_2x_3 = 0, \\ x_3 = 0, \end{cases}$$

состоящая из уравнения квадрики G в однородных аффинных координатах и уравнения несобственной прямой, после исключения x_3 приводит к квадратному уравнению $x_1^2 - 6x_1x_2 + 8x_2^2 = 0$, дискриминант которого больше нуля. А так как матрица квадрики

$$\left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\|$$

является неособенной, то в соответствии с таблицей пункта 1 делаем вывод, что квадрика G — гипербола.

Пример 2. *Найдем асимптоты гиперболы из примера 1.*

Решение. Решая квадратное уравнение, полученное при решении предыдущего примера, относительно $x_1 : x_2$, находим два значения: $(x_1 : x_2)' = 2$, $(x_1 : x_2)'' = 4$. Тем самым мы нашли координаты несобственных точек гиперболы: $K_\infty\ (2 : 1 : 0)$ и $L_\infty\ (4 : 1 : 0)$. Уравнения асимптот находим как уравнения касательных в точках K_∞ и L_∞. Для точки K_∞ по формуле (16.5) имеем:

$$\| 2,\ 1,\ 0 \| \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 8 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{matrix} \right\| = 0.$$

После перемножения получаем уравнения асимптоты: $-x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$. Аналогично находим уравнение второй асимптоты: $x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$. Переходя к неоднородным координатам, получаем соответственно:

$$x - 2y - 1 = 0,\ x - 4y + 1 = 0.$$

Пример 3. *Найдем центр гиперболы из примера 1.*

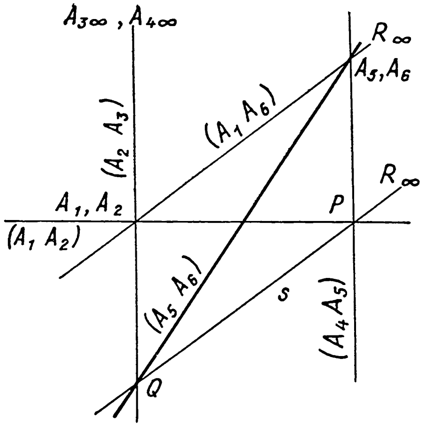

Рис. 84

Решение. *Первый способ.* Вычислив матрицу

$$G^{-1} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix},$$

находим центр C по формуле (18.1):

$$\lambda C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, в неоднородной системе центр имеет координаты $(3, 1)$.

Второй способ. Центр можно найти как точку пересечения асимптот, для чего надо решить систему:

$$\begin{cases} x - 2y - 1 = 0, \\ x - 4y + 1 = 0. \end{cases}$$

Решая ее, приходим к тому же результату.

Пример 4. *Даны ось параболы, ее вершина и еще одна точка параболы. Построим касательную к параболе в этой точке.*

Решение. Касательная к параболе в ее вершине известна — это перпендикуляр к оси. Поэтому вершину считаем двойной вершиной предельного шестивершинника Паскаля, обозначая ее двумя буквами A_1 и A_2; касательная в этой точке будет стороной A_1A_2 шестивершинника (рис. 84).

Несобственную точку параболы тоже считаем двойной вершиной и обозначаем через $A_{3\infty}$ и $A_{4\infty}$; сторона шестивершинника A_3A_4 есть несобственная прямая.

Данную точку тоже считаем двойной вершиной A_5, A_6; сторона шестивершинника A_5A_6— искомая касательная.

Таким образом, в предельном шестивершиннике Паскаля известны все вершины и пять сторон, шестая — искомая.

По точкам $P = (A_1A_2) \cap (A_4A_5)$ и $R_\infty = (A_3A_4) \cap (A_6A_1)$ (точка R несобственная, так как прямая A_3A_4 несобственная) строим паскалеву прямую $s = (PR_\infty)$. Далее находим точку $Q = (A_2A_3) \cap (A_5A_6)$, пользуясь тем, что она лежит на паскалевой прямой и, следовательно, $Q = s \cap (A_2A_3)$, где (A_2A_3) — ось параболы. Искомая прямая проходит через данную точку и точку Q.

ГЛАВА VI.

ГЕОМЕТРИИ ГРУППЫ КОЛЛИНЕАЦИЙ И ЕЕ ПОДГРУПП

§ 19. ГЕОМЕТРИЯ И ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

1. Клейновское определение геометрии. Как известно, с каждой группой W преобразований множества T связано некоторое отношение эквивалентности между подмножествами множества T (в геометрии принято подмножества основного множества называть *фигурами*). Мы будем говорить, что группа преобразований *индуцирует* отношение эквивалентности. А именно эквивалентными будут такие фигуры, которые можно отобразить одну на другую преобразованиями из данной группы. Групповые свойства множества преобразований позволяют легко доказать, что введенное отношение будет именно отношением эквивалентности.

Так, например, группа D перемещений евклидовой плоскости R_2 индуцирует отношение *конгруэнтности*; группа подобий M — отношение *подобия*; аффинная группа A на R_2 — отношение, для которого нет специального термина и которое поэтому называют «полным именем» — *аффинной эквивалентностью*. Отношение, связанное с группой K коллинеаций на проективной плоскости P_2, называется *проективной эквивалентностью*.

Все множество фигур разбивается на классы эквивалентности, которые, как известно, характеризуются следующими двумя условиями:

1) любые две фигуры из одного класса эквивалентны;

2) любые две фигуры из разных классов не эквивалентны.

Эти условия на «языке групп» формулируются так:

1) *каковы бы ни были две фигуры из одного класса, в группе существует преобразование, отображающее одну из этих фигур на другую*;

2) *в группе не существует преобразования, отображающего фигуру некоторого класса на фигуру другого класса.*

Последнее требование можно сформулировать и иначе: *всякая фигура и ее образ относительно любого преобразования из группы входят в один класс.*

Свойства, общие для всех фигур какого-либо класса, называются *геометрическими*. Иными словами, геометрические свойства — это те, которые сохраняются при всех преобразованиях из данной группы.

Теперь ясно, что существует бесконечное множество различных геометрий. Они характеризуются как выбором основного множества

T, так и действующей на нем группой W преобразований. Впрочем, множество T выбирается обычно не вполне произвольно: оно должно относиться к классу так называемых многообразий, на определении которых здесь останавливаться не будем. Заметим только, что евклидово пространство R_n, проективная плоскость P_2, окружность, треугольник, контур треугольника, цилиндрическая поверхность и т. д. — суть многообразия.

Изложенные соображения привели Ф. Клейна[1] к формулировке общих принципов геометрии, что позволило ему дать определение геометрии:

«Дано многообразие и в нем группа преобразований; нужно исследовать те свойства фигур, принадлежащих многообразию, которые не изменяются под действием преобразований группы».

Это определение он формулирует и по-другому:

«Дано многообразие и в нем группа преобразований; требуется развить теорию инвариантов этой группы».

Это же определение иногда формулируют еще короче (но не точней):

Геометрия — это наука о свойствах фигур, инвариантных относительно некоторой группы преобразований.

2. Геометрия группы и ее подгрупп. Выясним соотношение между двумя геометриями, действующими на одном множестве T: одна из них определяется группой W_1, другая — ее подгруппой W. При переходе от геометрии группы W (мы будем говорить: W-геометрии) к геометрии более широкой группы W_1 ряд геометрических свойств утрачивается, ибо свойства, «выдерживающие» преобразования из группы W, могут «разрушиться» при других преобразованиях. Стало быть, при переходе от W-геометрии к W_1-геометрии ряд геометрических фактов отпадает, т. е. геометрия более широкой группы беднее фактами по сравнению с геометрией более узкой группы.

Те факты, которые принадлежат W_1-геометрии, представляют собой «более устойчивые» свойства фигур, свойства, которые «выдерживают» более широкую группу преобразований. Они присущи более обширным классам эквивалентности. Это более глубокие свойства фигур.

Сравним, например, M-геометрию и A-геометрию плоскости R_2, где приняты обозначения предыдущего пункта: M — группа подобий, A — аффинная группа; $M \subset A$.

1. В M-геометрии множество подобных треугольников образует класс эквивалентности, а в A-геометрии все треугольники образуют один класс.

2. Теорема Пифагора, записанная формулой $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, где a, b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника, сохраняется при преобразовании подобия, так как величина угла и

[1] Феликс Клейн (1849—1925) — выдающийся немецкий математик. Общие принципы геометрии были изложены им в лекции «Сравнительное обозрение новейших геометрических исследований», изданной в 1872 г. отдельной брошюрой и известной под названием «Эрлангенская программа Клейна».

отношение отрезков инвариантны относительно $\boldsymbol{M}$. Следовательно, это факт из $\boldsymbol{M}$-геометрии. В $\boldsymbol{A}$-геометрии, где все треугольники эквивалентны, эта теорема не имеет смысла.

3. Теорема «Медианы треугольника пересекаются в одной точке» принадлежит $\boldsymbol{A}$-геометрии и, следовательно, $\boldsymbol{M}$-геометрии тоже.

4. Понятие окружности принадлежит $\boldsymbol{M}$-геометрии, понятие эллипса — $\boldsymbol{A}$-геометрии.

И так далее.

В заключение отметим, что школьная (евклидова) геометрия — это $\boldsymbol{D}$-геометрия, где $\boldsymbol{D}$ — группа перемещений. Но большинство понятий и фактов школьной геометрии может быть отнесено к $\boldsymbol{M}$-геометрии, а некоторые даже и к $\boldsymbol{A}$-геометрии.

Выяснение вопроса о принадлежности понятий и фактов школьной геометрии к одной из трех упомянутых геометрий — полезное упражнение.

3. Проективная геометрия как геометрия группы коллинеаций. В соответствии с определением Клейна проективная геометрия изучает свойства фигур проективной плоскости, сохраняющиеся при коллинеациях. Эти свойства называются *проективными*.

Группа коллинеаций $\boldsymbol{K}$ индуцирует на проективной плоскости отношение *проективной эквивалентности*. По этому отношению множество всех фигур разбивается на классы проективно эквивалентных между собой фигур. Предметом проективной геометрии, таким образом, являются свойства фигур, которыми обладают *все* фигуры того или иного класса.

Рассмотрим некоторые классы проективно эквивалентных фигур и присущие этим классам проективные свойства.

1. *Класс прямых*. Докажем, что множество прямых образует проективный класс. Так как при коллинеациях прямая отображается на прямую, то достаточно показать, что каковы бы ни были две прямые l и l', существует коллинеация, отображающая одну из них на другую.

Возьмем произвольно две упорядоченные четверки точек A, B, C, D и A', B', C', D', не коллинеарные по три, но так, чтобы $A, B \in l$ и $A', B' \in l'$. Тогда коллинеация, отображающая первую четверку на вторую (см. теорему § 13, п. 2), отображает l на l'.

2. *Класс пар различных прямых*. Доказательство того, что пары прямых образуют класс проективно эквивалентных фигур, аналогично предыдущему. Заметим, что пара различных вещественных прямых образует квадрику ранга 2 и что класс таких квадрик уже был выделен в § 15, п. 3.

3. *Класс полных четырехвершинников*. Это будет класс эквивалентности в силу теоремы о задании коллинеации (§ 13, п. 2). Все фигуры этого класса обладают свойствами, составляющими содержание теоремы о гармонических свойствах полного четырехвершинника (§ 10, п. 2).

4. *Класс трехвершинников*.

5. *Класс гармонических четверок точек*. Докажем, что множество гармонических четверок образует проективный класс. Так как при

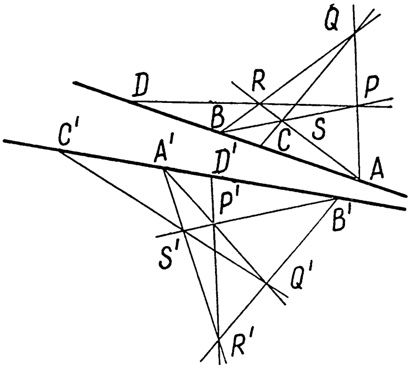

Рис. 85

коллинеациях гармонизм не нарушается, то достаточно показать, что, каковы бы ни были гармонические четверки точек A, B, C, D и A', B', C', D', найдется коллинеация, отображающая первую четверку на вторую.

Построим полный четырехвершинник $PQRS$ так, чтобы A и B были его диагональными точками, а C и D лежали на сторонах, проходящих через третью диагональную точку (рис. 85); такой четырехвершинник может получиться, например, при построении четвертой гармонической к точкам A, B, C. Таким же образом, исходя из второй четверки, строим четырехвершинник $P'Q'R'S'$.

Если обозначения четырехвершинников выбраны соответственно, то коллинеация, отображающая первый на второй, переводит первую гармоническую четверку во вторую.

6. Класс овальных квадрик. Так как коллинеация есть линейное преобразование, то уравнение второго порядка при коллинеации переходит в уравнение второго порядка, т. е. квадрика отображается на квадрику. Более того, если данная квадрика овальная, то ее образ тоже овал; это прямое следствие закона инерции квадратичных форм.

Осталось доказать, что для любых двух овальных квадрик G и G' найдется коллинеация $\varkappa$, отображающая G на G'.

Пусть $R = R(E_i)$ — та система координат, в которой квадрика G имеет каноническое уравнение $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а $R' = R(E_i')$ — система, в которой G' имеет такое же уравнение. Рассмотрим коллинеацию $\varkappa$, определяемую условиями $E_i \to E_i'$, $i = 1, 2, 3, 0$. Тогда, как показано при доказательстве теоремы § 13, п. 2, координаты какой-либо точки в системе $\boldsymbol{R}$ равны координатам ее образа в системе $\boldsymbol{R}'$. Следовательно, образ всякой линии имеет в $\boldsymbol{R}'$ такое же уравнение, какое сама линия имеет в $\boldsymbol{R}$. Отсюда заключаем, что G' — образ G при коллинеации $\varkappa$.

Проведенное доказательство позволяет объяснить, почему при проективной классификации овальные квадрики выделяются в отдельный класс, а первые два примера настоящего пункта—почему выделяются в отдельные классы пары совпавших и пары различных прямых.

Ранее были рассмотрены многие проективные свойства овальных квадрик. Это полярные свойства, а также свойства, выражаемые теоремами Паскаля и Брианшона.

4. Абсолют. Рассмотрим общий прием построения разных геометрий, тоже предложенный Ф. Клейном.

Пусть на множестве $\boldsymbol{T}$, элементы которого будем называть точками, действует некоторая группа преобразований W. Во множестве T выделим какое-либо подмножество N и рассмотрим лишь те преобразования $v \in W$, которые это подмножество отображают на себя: $v(N) = N$. Такие преобразования называются *автоморфизмами* относительно подмножества N, а само подмножество N — *абсолютом*.

Заметим, что это определение не требует, чтобы каждая точка абсолюта отображалась на себя; достаточно лишь, чтобы абсолют как целое оставался без изменений.

Теорема. *Пусть на множестве T, на котором задан абсолют N, действует группа преобразований W. Тогда*

1) *множество V преобразований из W, автоморфных относительно абсолюта, есть подгруппа группы W;*

2) *сужение всякого преобразования, входящего в V, на множество $T \setminus N$ является преобразованием множества $T \setminus N$.*

Доказательство. 1. Покажем, что V удовлетворяет двум требованиям, характеризующим подгруппу.

Пусть $v_1, v_2 \in V$, т. е. $v_1(N) = v_2(N) = N$.
Тогда:

$$v_2 v_1(N) = v_2(v_1(N)) = v_2(N) = N$$

и потому $v_2 v_1 \in V$.

Если на обе части равенства $v(N) = N$ подействовать преобразованием v^{-1}, то получим $v^{-1}(N) = N$. Следовательно, из $v \in V$ вытекает $v^{-1} \in V$.

Первая часть теоремы доказана.

2. Покажем, что любое преобразование $v \in V$ биективно отображает множество $T \setminus N$ на себя.

Прежде всего заметим, что если $A \in T \setminus N$, то и $v(A) \in T \setminus N$. В самом деле, если бы $v(A) \in N$, то $v^{-1}(v(A)) \in v^{-1}(N)$ и, следовательно, $A \in N$. Итак,

$$v(T \setminus N) \subset T \setminus N.$$

Из этого соотношения и определения абсолюта следует, что преобразование v биективно отображает множество $T \setminus N$ на себя, так как в противном случае было бы нарушено соответствующее свойство отображения v как преобразования множества T.

Теорема доказана. Она позволяет рассматривать подгруппу автоморфизмов как группу преобразований множества $T \setminus N$, что обычно и делают.

В дальнейшем нам придется на группу V налагать дополнительные ограничения, заключающиеся в том, что преобразования из V должны действовать внутри абсолюта N не произвольно, а некоторым определенным образом. Например, можно потребовать, чтобы преобразования из V не только множество N отображали на себя, но чтобы они также оставляли неподвижной некоторую точку множества. В таком случае абсолютом служит множество N с отмеченной в нем точкой.

§ 20. АФФИННАЯ ГЕОМЕТРИЯ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Аффинная группа как группа автоморфизмов относительно несобственной прямой. В этом и следующих параграфах будет показано, как реализуются идеи Клейна, изложенные в § 19, в применении к аффинной, евклидовой, некоторым неевклидовым геометриям. Все эти геометрии являются геометриями подгрупп проективной группы.

Теорема. *Если на расширенной евклидовой плоскости* $\overline{\boldsymbol{R}}_2$, *на которой действует группа* $\boldsymbol{K}$ *коллинеаций, за абсолют принять несобственную прямую* a_∞, *то соответствующая подгруппа* $\boldsymbol{A}$ *автоморфизмов, рассматриваемая на* $\overline{\boldsymbol{R}}_2 \setminus a_\infty = \boldsymbol{R}_2$, *т. е. на евклидовой плоскости, является группой аффинных преобразований.*

Доказательство. На плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ введем систему однородных аффинных координат. Тогда уравнения произвольной коллинеации $\varkappa$ можно записать в виде (13.2):

$$\begin{cases} \lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + p_{13}x_3', \\ \lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + p_{23}x_3', \\ \lambda x_3 = p_{31}x_1' + p_{32}x_2' + p_{33}x_3', \end{cases}$$

где на коэффициенты p_{ij} накладывается единственное ограничение $\det \| p_{ij} \| \neq 0$.

Так как прямая a_∞ имеет уравнение $x_3 = 0$, то ее образ будет иметь уравнение $p_{31}x_1' + p_{32}x_2' + p_{33}x_3' = 0$. Чтобы коллинеация $\varkappa$ входила в подгруппу $\boldsymbol{A}$, надо, чтобы образ прямой a_∞ и сама прямая совпадали, а это будет при условии $p_{31} = p_{32} = 0$. Следовательно, преобразования подгруппы автоморфизмов задаются следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \lambda x_1 = p_{11}x_1' + p_{12}x_2' + p_{13}x_3', \\ \lambda x_2 = p_{21}x_1' + p_{22}x_2' + p_{23}x_3', \\ \lambda x_3 = \qquad\qquad\qquad\quad p_{33}x_3', \end{cases}$$

где

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & p_{33} \end{vmatrix} = p_{33} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

и, следовательно,

$$p_{33} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Преобразование $\varkappa$ рассмотрим на плоскости $\boldsymbol{R}_2$, для чего достаточно считать $x_3 \neq 0$, $x_3' \neq 0$. Кроме того, нет более надобности в однородных координатах, поэтому в уравнениях преобразования перейдем к неоднородным координатам, для чего первое и второе уравнения разделим почленно на третье. Так как по формулам (7.2) $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, то

$$\begin{cases} x = \dfrac{p_{11}}{p_{33}} x' + \dfrac{p_{12}}{p_{33}} y' + \dfrac{p_{13}}{p_{33}}, \\ y = \dfrac{p_{21}}{p_{33}} x' + \dfrac{p_{22}}{p_{33}} y' + \dfrac{p_{23}}{p_{33}}, \end{cases}$$

откуда, меняя обозначения коэффициентов, получаем:

$$\begin{cases} x = ax' + by' + c, \\ y = a_1x' + b_1y' + c_1, \end{cases} \tag{20.1}$$

где на коэффициенты накладывается единственное ограничение

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Так как (20.1) — уравнения аффинных преобразований, то теорема доказана.

2. Проективные определения аффинных понятий. Доказанная теорема позволяет, исходя из проективной плоскости $\boldsymbol{P}_2$, построить аффинную геометрию. Для этого необходимо только выделить несобственную прямую. Поскольку на проективной плоскости все прямые равноправны (они образуют класс проективно эквивалентных фигур), то нет оснований отдавать предпочтение какой-либо одной из них: в качестве несобственной прямой (абсолюта) можно взять *произвольную* прямую a_∞. На основании результатов, полученных в предыдущих главах, можно теперь определить все аффинные понятия в терминах проективной геометрии.

1. *Аффинная плоскость* — $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$.

2. *Группа* $\boldsymbol{A}$ *аффинных преобразований* — действующая на $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ подгруппа группы $\boldsymbol{K}$ коллинеаций, каждое преобразование которой отображает абсолют a_∞ на себя.

3. Пусть l — прямая проективной плоскости, A_∞ — точка пересечения ее с абсолютом (рис. 86). Тогда $l \setminus A_\infty$ — *прямая аффинной плоскости* (см. § 5, п. 3, свойство 1).

4. Пусть l и l' — две прямые проективной плоскости, точка пересечения которых A_∞ принадлежит абсолюту (см. рис. 86). Тогда $l \setminus A_\infty$ и $l' \setminus A_\infty$ — *параллельные прямые аффинной плоскости* (см. § 5, п. 3, свойство 2). На рисунке 87 $ABCD$ — параллелограмм.

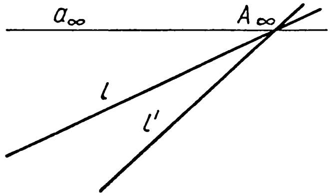

Рис. 86

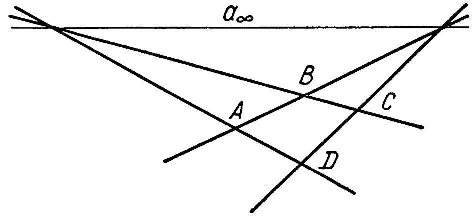

Рис. 87

5. Пусть A и B — какие-либо точки аффинной плоскости $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$, (AB) — проективная прямая, M_∞ — точка пересечения этой прямой с a_∞. Тогда точка $C \in (AB)$ называется *лежащей между* A и B, если пары A, B и C, M_∞ разделяют друг друга (см. определение разделенности пар в § 1, п. 3). Множество точек, лежащих между двумя точками, называется *открытым отрезком*.

6. Пусть A, B, C — коллинеарные точки аффинной плоскости. Тогда в соответствии с (4.2) простое отношение (ABC) определяется формулой

$$(ABC) = -(ABCM_\infty),$$

где $M_\infty = (AB) \cap a_\infty$. Точка C — середина отрезка, если $(ABCM_\infty) = -1$.

7. *Эллипс, парабола, гипербола* — овальные квадрики, имеющие с абсолютом соответственно нуль, одну или две общие точки (см. рис. 18).

8. *Неоднородные аффинные координаты* вводятся так. Сначала в соответствии с определением однородных аффинных координат задается система проективных координат так, чтобы фундаментальные точки E_1 и E_2 лежали на прямой a_∞, а затем формулами (7.2) определяются неоднородные аффинные координаты.

И так далее.

§ 21. ЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Условие, при котором аффинное преобразование является преобразованием подобия.

Теорема. *Для того чтобы аффинное преобразование евклидовой плоскости $\boldsymbol{R}_2$ было преобразованием подобия, необходимо и достаточно, чтобы образом любой пары перпендикулярных прямых была пара перпендикулярных прямых.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна, докажем достаточность.

Как известно, аффинное преобразование

$$\begin{cases} x' = ax + by + c, \\ y' = a_1x + b_1y + c_1 \end{cases}$$

отображает всякий вектор $\vec{h} = (p, q)$ на вектор $\vec{h}' = (p', q')$, координаты которого находятся из уравнений

$$\begin{cases} p' = ap + bq, \\ q' = a_1p + b_1q. \end{cases}$$

Потребуем, чтобы образы $\vec{h}_1'$ и $\vec{h}_2'$ перпендикулярных векторов $\vec{h}_1 = (1, 0)$ и $\vec{h}_2 = (0, 1)$ были перпендикулярны. Из уравнений преобразования находим координаты образов: $\vec{h}_1' = (a, a_1)$ и $\vec{h}_2' = (b, b_1)$, а затем и условие их перпендикулярности: $ab + a_1b_1 = 0$.

Теперь возьмем два других перпендикулярных вектора $\vec{h}_3 = (1, 1)$ и $\vec{h}_4 = (1, -1)$ и найдем координаты их образов: $\vec{h}_3' = (a + b, a_1 + b_1)$ и $\vec{h}_4' = (a - b, a_1 - b_1)$, а также условие перпендикулярности этих образов: $(a + b)(a - b) + (a_1 + b_1)(a_1 - b_1) = 0$.

Итак, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} ab + a_1b_1 = 0, \\ a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2. \end{cases}$$

Введя обозначение $a^2 + a_1^2 = b^2 + b_1^2 = k^2$, положим:

$$a = k\cos\varphi,\ a_1 = k\sin\varphi,\ b = k\sin\psi,\ b_1 = k\cos\psi.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение системы, получаем: $\sin(\varphi + \psi) = 0$, откуда $\psi = -\varphi + \pi m$, $m = 0,1$.

Теперь коэффициенты b и b_1 можно выразить через φ. Получаем:

$$b = -k\sin\varphi,\ b_1 = k\cos\varphi, \text{ если } m = 0,$$
$$b = k\sin\varphi,\ b_1 = -k\cos\varphi, \text{ если } m = 1,$$

или

$$b = -\varepsilon k\sin\varphi,\ b_1 = \varepsilon k\cos\varphi,$$

где $\varepsilon = \pm 1$.

При найденных значениях коэффициентов a, b, a_1, b_1 уравнения аффинного преобразования, записанные в начале доказательства, превращаются в уравнения преобразования подобия.

Теорема доказана.

2. Группа подобий как группа автоморфизмов относительно несобственной прямой с заданной на ней абсолютной инволюцией. Пусть a_∞ — несобственная прямая, а S — фиксированная собственная точка евклидовой плоскости. Рассмотрим отображение $j\colon a_\infty \to a_\infty$, при котором за образ произвольной точки $A \in a_\infty$ принимается точка A', такая, что угол ASA' — прямой.

Отображение j не зависит от выбора точки S, так как для любой другой собственной точки S_1 будет снова $\widehat{AS_1A'} = \frac{\pi}{2}$, — это следует из параллельности сторон углов ASA' и AS_1A'.

Покажем, что отображение j проективно, т. е. $(A_1A_2A_3A_4) = (A_1'A_2'A_3'A_4')$, где $A_i \in a_\infty$, $A_i' = j(A_i)$, при $i = 1, 2, 3, 4$. Приняв обозначения для прямых: $(SA_i) = a_i$, $(SA_i') = a_i'$, получим $(a_1a_2a_3a_4) = (a_1'a_2'a_3'a_4')$, так как первая четверка получается из второй поворотом на угол $\frac{\pi}{2}$, а при повороте двойное отношение сохраняется (почему?). По основному свойству двойных отношений получаем, что $(A_1A_2A_3A_4) = (A_1'A_2'A_3'A_4')$.

Проективное преобразование j в силу его определения инволюционно и не имеет неподвижных точек. Это, следовательно, эллиптическая инволюция; она называется *абсолютной инволюцией.*

Будем теперь рассматривать на плоскости $\overline{\boldsymbol{R}}_2$ такие коллинеации $\varkappa$, которые не только отображают на себя несобственную прямую a_∞, но и сохраняют абсолютную инволюцию j. Последнее надо понимать так: если точки A_∞ и A'_∞ соответствуют друг другу в абсолютной инволюции, то и их образы относительно коллинеации $\varkappa$ тоже соответствуют друг другу в этой инволюции. Иными словами, для любой точки из $A' = j(A)$ следует $\varkappa(A') = j(\varkappa(A))$.

С учетом сказанного из теоремы предыдущего пункта и теоремы § 20, п. 1 вытекает следующий результат.

Теорема. *Если на расширенной евклидовой плоскости* $\overline{\boldsymbol{R}}_2$, *на которой действует группа* $\boldsymbol{K}$ *коллинеаций, за абсолют принять несобственную прямую* a_∞ *с заданной на ней абсолютной инволюцией* j, *то соответствующая подгруппа* $\boldsymbol{M}$ *автоморфизмов, рассматриваемая на* $\overline{\boldsymbol{R}}_2 \setminus a_\infty = \boldsymbol{R}_2$, *т. е. на евклидовой плоскости, есть группа преобразований подобия.*

Абсолют евклидова пространства обозначится символом $< a_\infty, j >$.

3. Проективные определения евклидовых понятий. Теперь мы можем, исходя из проективной плоскости $\boldsymbol{P}_2$, построить евклидову геометрию. Надо только на плоскости $\boldsymbol{P}_2$ выделить абсолют.

Рассмотрим множество всевозможных пар $< a, \varphi >$, где a — какая-либо прямая проективной плоскости, а φ — произвольная эллиптическая инволюция на ней. Все такие пары проективно эквивалентны. В самом деле, для любой эллиптической инволюции φ найдется гармоническая четверка, состоящая из двух пар соответствующих точек (теорема 1, § 12, п. 6), которыми эта инволюция может быть определена (теорема 2, § 12, п. 4). Как показано в § 19, п. 3, гармонические четверки образуют класс эквивалентности относительно коллинеаций. А так как пара $< a, \varphi >$ может быть задана гармонической четверкой, то все такие пары тоже образуют класс эквивалентности.

Это значит, что в качестве абсолюта можно взять любую пару $< a, \varphi >$, т. е. *любую прямую проективной плоскости можно считать несобственной, а любую эллиптическую инволюцию на ней — абсолютной.*

Как условились, эту пару будем обозначать: $< a_\infty, j >$.

На основании ранее полученных результатов получаем следующие определения евклидовых понятий.

1. *Евклидова плоскость* — $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$. Евклидова плоскость как точечное множество совпадает с аффинной.

2. *Прямая, параллельность прямых, отношение «между»* для трех коллинеарных точек, *отрезок, простое отношение трех точек* и все прочие аффинные понятия определяются, как в § 20.

3. Группа $\boldsymbol{M}$ преобразований подобия — действующая на $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ подгруппа группы $\boldsymbol{K}$ коллинеаций, каждое преобразование которой сохраняет абсолют $< a_\infty, j >$.

4. Пусть l и m — проективные прямые, проходящие через точки L_∞ и M_∞, причем эти точки соответствуют друг другу в абсолютной инволюции. Тогда евклидовы прямые $l \setminus L_\infty$ и $m \setminus M_\infty$ *перпендикулярны*.

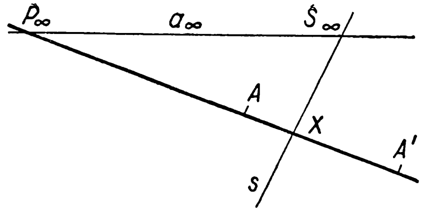

Рис. 88

5. Рассмотрим инволюционную гомологию, центр которой P_∞ лежит на абсолюте, а ось s проходит через точку S_∞, которая соответствует в абсолютной инволюции точке P_∞ (рис. 88). Тогда образ A' какой-либо точки A характеризуется условием $(P_\infty XAA') = -1$, где $X = (P_\infty A) \cap s$ (см. теорему § 14, п. 3). Вследствие определений, приведенных в § 20, п. 2, это означает, что X — середина отрезка AA'. А так как, кроме того, евклидовы прямые $(AA') \setminus P_\infty$ и $s \setminus S_\infty$ перпендикулярны, рассматриваемое преобразование является симметрией.

Итак, *осевая симметрия* — это сужение на $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ инволюционной гомологии, центр которой лежит на абсолюте, а ось проходит через точку, соответствующую центру в абсолютной инволюции.

Мы не останавливаемся на доказательстве того, что так определенная симметрия входит в группу $\boldsymbol{M}$.

6. Перемещение, как известно, либо является осевой симметрией, либо допускает разложение в композицию симметрий. Поэтому *перемещение* можно определить как сужение на $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ инволюционной гомологии или композиции нескольких инволюционных гомологий специального вида, о которых шла речь в предыдущей рубрике. *Конгруэнтными* называются фигуры, которые можно отобразить одна на другую перемещением.

7. Построим прямоугольную декартову систему координат. Пусть $E_{1\infty}$, $E_{2\infty}$ и Q_∞, Q'_∞ — две пары точек, соответствующих друг другу в абсолютной инволюции и делящих друг друга гармонически (существование пары Q_∞, Q'_∞ при любом выборе пары $E_{1\infty}$, $E_{2\infty}$ гарантируется теоремой 1 § 12, п. 6). Затем возьмем произвольно собственную точку E_3 и точку E_0 на прямой $(E_3Q_\infty) \setminus Q_\infty$ (рис. 89).

Система проективных координат $R(E_i)$ является, как было отмечено в § 20, п. 2, системой однородных аффинных координат. Ее оси $E_3E_{1\infty}$ и $E_3E_{2\infty}$ перпендикулярны. Более того, если $A_1 = (E_3E_{1\infty}) \cap$ $\cap (E_0E_{2\infty})$, $A_2 = (E_3E_{2\infty}) \cap (E_0E_{1\infty})$, то единичные отрезки E_3A_1 и E_3A_2 на осях конгруэнтны. В самом деле, в силу теоремы о гармонических свойствах полного четырех-

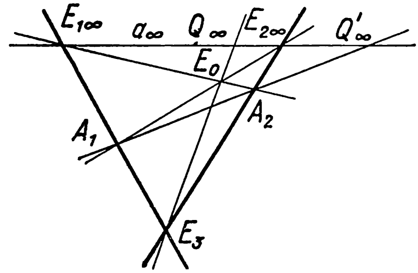

Рис. 89

вершинника (в применении к четырехвершиннику $A_1E_0A_2E_3$) прямая A_1A_2 проходит через четвертую гармоническую к точкам $E_{1\infty}$, $E_{2\infty}$, Q_∞, т. е. через точку Q'_∞. Поэтому инволюционная гомология с центром Q'_∞ и осью E_3Q_∞ отображает отрезки E_3A_1 и E_3A_2 друг на друга, а это означает их конгруэнтность.

Итак, система координат $R\ (E_i)$ — это система однородных прямоугольных декартовых координат на плоскости $\boldsymbol{P}_2$ с абсолютом $< a_\infty, j >$. Соответствующая *система неоднородных прямоугольных декартовых координат* на $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ строится обычным образом: за неоднородные координаты точки принимается пара чисел x, y, связанная с однородными координатами $(x_1 : x_2 : x_3)$ соотношениями (7.2).

Так как все понятия евклидовой геометрии в принципе могут быть выражены при помощи прямоугольных декартовых координат, которым здесь дано проективное определение, то это дает нам право считать, что *все понятия евклидовой геометрии могут быть определены в терминах проективной геометрии*.

§ 22. ПОНЯТИЕ О НЕЕВКЛИДОВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ С ПРОЕКТИВНОЙ ТОЧКИ ЗРЕНИЯ

1. Общие замечания. Мы уже видели, что, выбирая соответствующим образом абсолют на проективной плоскости, можно прийти и к аффинной и к евклидовой геометриям. При другом выборе абсолюта получатся другие геометрии. Оказывается, что наиболее важные виды геометрии могут быть получены именно как геометрии тех или иных подгрупп группы коллинеаций.

Клейн и Кэли[1] разработали принципы введения метрики на проективной плоскости, т. е. дали общие определения расстояний и величин углов, используя при этом те или иные абсолюты.

В следующих трех пунктах мы кратко остановимся на двух геометриях — псевдоевклидовой и геометрии Лобачевского (гиперболической).

Некоторые из неевклидовых геометрий тесно связаны с физикой, точнее с кинематикой — разделом физики, изучающим движение тел независимо от его причин. Пусть точка движется по прямой и в момент времени t имеет координату x. Пара (t, x) называется *событием*, а множество событий — *пространством событий*. Если движение точки подчинено законам механики, то в пространстве событий будет действовать некоторая геометрия. В случае релятивистской механики Эйнштейна это псевдоевклидова геометрия, в случае классической механики Галилея — Ньютона — геометрия проективной плоскости, абсолют которой состоит из прямой и зафиксированной на ней точки. Обоснование этих положений находится за рамками нашего курса.

2. Псевдоевклидова геометрия. Если на проективной плоскости $\boldsymbol{P}_2$ за абсолют принять какую-либо прямую a_∞ с гиперболической инволюцией h на ней, то $\boldsymbol{P}_2 \setminus a_\infty$ называется *псевдоевклидовой плоскостью* и обозначается ${}^1\boldsymbol{R}_2$.

---

[1] Артур Кэли — английский алгебраист (1821—1895).

Инволюция h имеет две неподвижные точки, которые обозначим через I_1 и I_2 и назовем *циклическими*. Эти две точки определяют как прямую a_∞, так и инволюцию h (§ 12, п. 6, следствие 1), и потому пару точек (I_1, I_2) можно было бы считать абсолютом. Мы, однако, принимаем за абсолют пару $<a_\infty, h>$, что позволит нам увидеть далеко идущие аналогии в свойствах плоскостей $\boldsymbol{R}_2$ и ${}^1\boldsymbol{R}_2$.

Абсолюты плоскостей $\boldsymbol{R}_2$ и ${}^1\boldsymbol{R}_2$ отличаются только характером абсолютной инволюции. Поэтому все *аффинные свойства этих плоскостей* одни и те же и *совпадают со свойствами аффинной плоскости* (§ 20, п. 2).

Точно так же, как и в случае евклидовой геометрии (§ 21, п. 3), определяются следующие понятия псевдоевклидовой геометрии: *группа преобразований подобия*, *перпендикулярность прямых* (заметим, что прямые, проходящие через циклическую точку, перпендикулярны самим себе; такие прямые называются *изотропными*), *симметрия относительно неизотропной прямой*, *перемещение*, *конгруэнтность*.

Отметим некоторые факты псевдоевклидовой геометрии, отличающиеся от евклидовых.

Теорема 1. *Если несобственные точки A_∞ и B_∞ прямых a и b разделены циклическими точками ($A_\infty, B_\infty \div I_1, I_2$), то прямые $a \setminus A_\infty$ и $b \setminus B_\infty$ плоскости ${}^1\boldsymbol{R}_2$ не могут быть отображены друг на друга перемещением.*

Доказательство. Пусть γ — инволюционная гомология, центр которой находится в точке P_∞, ось проходит через точку Q_∞, причем точки P_∞ и Q_∞ соответствуют друг другу в абсолютной инволюции h (рис. 90). Пусть A_∞ — какая-либо точка несобственной прямой и $A'_\infty = \gamma(A_\infty)$. Теорема будет доказана, если доказать соотношение $A_\infty, A'_\infty \mathrel{\dot{\underline{\cdot\cdot}}} I_1, I_2$, которое равносильно следующему неравенству:

$$(I_1 I_2\, A_\infty A'_\infty) > 0.$$

Левую часть этого неравенства представим по формуле (3.4) в виде произведения:

$$(I_1 I_2 A_\infty A'_\infty) = (I_1 I_2 A_\infty P_\infty) \cdot (I_1 I_2 P_\infty A'_\infty).$$

Так как

$$\gamma : I_1 \to I_2,\ \ I_2 \to I_1,\ \ A_\infty \to A'_\infty,\ P_\infty \to P_\infty,$$

то

$$(I_1 I_2 A_\infty P_\infty) = (I_2 I_1 A'_\infty P_\infty) = \\ = (I_1 I_2 P_\infty A'_\infty),$$

откуда:

$$(I_1 I_2 A_\infty A'_\infty) = (I_1 I_2 P_\infty A'_\infty)^2 > 0,$$

что и требовалось доказать.

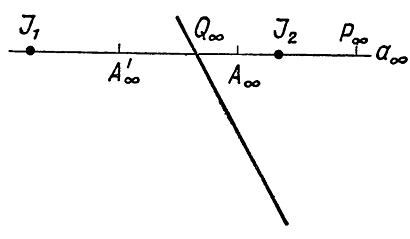

Рис. 90

Из теоремы следует, что даже неизотропные прямые не образуют класса эквивалентности относи-

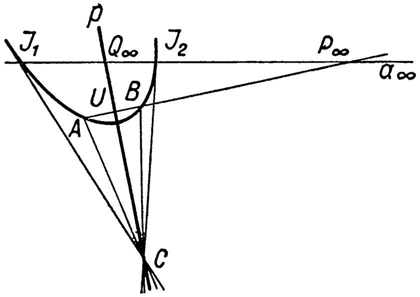

Рис. 91

тельно группы перемещений; можно показать, что множество неизотропных прямых делится на два класса. *Отрезки прямых разных классов всегда неконгруэнтны.*

В частности, разным классам принадлежат перпендикулярные прямые. Поэтому в псевдоевклидовой геометрии не существует *прямоугольных декартовых координат* в обычном смысле слова: единичные отрезки на осях неконгруэнтны. Для того чтобы иметь возможность применять термин «прямоугольные декартовы координаты» и в псевдоевклидовой геометрии, приходится несколько расширить его значение.

Теорема 2. *Пусть G — овальная квадрика, проходящая через циклические точки, C — ее центр, A и B — какие-либо собственные точки квадрики G. Тогда отрезки CA и CB конгруэнтны в смысле псевдоевклидовой геометрии* (рис. 91).

Доказательство. Несобственную точку прямой AB обозначим через P_∞, а ее поляру относительно G — через p; по свойству 1 (§ 16, п. 4) $C \in p$.

Если $U = (AB) \cap p$ и $Q_\infty = a_\infty \cap p$, то по определению поляр

$$(P_\infty UAB) = (P_\infty Q_\infty I_1 I_2) = -1.$$

Это, во-первых, означает, что сужение инволюционной гомологии $\gamma_{P_\infty, p}$ на плоскость ${}^1\boldsymbol{R}_2$ есть симметрия относительно прямой $p \setminus Q_\infty$ и, во-вторых, что точки A и B симметричны. А так как C лежит на оси, то тем самым доказана конгруэнтность отрезков CA и CB.

Из доказанной теоремы следует, что квадрика, проходящая через циклические точки, является окружностью и что окружность на плоскости ${}^1\boldsymbol{R}_2$ относится к аффинному классу гипербол.

3. Геометрия Лобачевского. На проективной плоскости примем за абсолют вещественную овальную квадрику. Тогда множество точек, не лежащих на абсолюте, делится на два класса — класс внутренних и класс внешних точек. При автоморфизмах относительно абсолюта эти точки, как легко видеть, не «перемешиваются» — каждый из классов отображается на себя.

Множество внутренних точек абсолюта называется *плоскостью Лобачевского* и обозначается ${}^1\boldsymbol{S}_2$. Сужение группы $\boldsymbol{H}$ автоморфизмов, являющейся подгруппой группы коллинеаций $\boldsymbol{K}$, на внутренность абсолюта называется *группой перемещений*. Две фигуры плоскости Лобачевского, которые можно совместить перемещением, называются *конгруэнтными*.

Часть прямой проективной плоскости, заключенная внутри абсолюта, называется *прямой* плоскости Лобачевского (сокращенно — h-прямой; такое сокращение мы будем применять и в других случаях).

Пусть A и B — две h-точки, т. е. внутренние точки абсолюта. Исходя из определения внутренних точек, можно показать, что один из двух отрезков с концами A и B проективной прямой AB целиком находится внутри абсолюта и называется *h-отрезком*. Это дает возможность очевидным образом ввести понятия «*h-между*», «*h-луч*», «*h-угол*».

Теорема 1. *На плоскости Лобачевского существует бесконечное множество прямых, проходящих через данную точку, лежащую вне прямой, и не пересекающих эту прямую.*

Доказательство. Пусть имеется h-прямая a и не принадлежащая ей h-точка A. На проективной прямой, содержащей данную h-прямую, возьмем произвольно точку M, внешнюю по отношению к абсолюту или лежащую на нем (рис. 92). Тогда внутренняя часть проективной прямой AM представляет собой h-прямую, не имеющую с h-прямой a общих h-точек.

Теорема доказана. При аксиоматическом изложении геометрии Лобачевского эта теорема обычно принимается за аксиому.

Две h-прямые называются *параллельными*, если содержащие их проективные прямые пересекаются в точке абсолюта, и *сверхпараллельными* — если во внешней точке. На рисунке 92 K и L — точки пересечения проективной прямой, содержащей данную h-прямую a, с абсолютом, h-прямые AK и AL параллельны h-прямой a, а (AM) — сверхпараллельна h-прямой a. Видим, что через h-точку можно провести две h-прямые, параллельные данной.

Теорема 2. *Пусть P — внешняя точка абсолюта, p — ее поляра. Тогда сужение инволюционной гомологии $\gamma_{P,\,p}$ на внутренность абсолюта есть h-перемещение, называемое симметрией относительно h-прямой p.*

Доказательство. Пусть M — произвольная точка абсолюта, N — вторая точка пересечения прямой PM с абсолютом (рис. 93). Тогда по определению поляр $(PXMN) = -1$, где $X = (PM) \cap p$. На основании теоремы § 14, п. 3 N есть образ M (и наоборот) при инволюционной гомологии $\gamma_{P,\,p}$. Тем самым доказано, что эта гомология есть автоморфизм относительно абсолюта, а ее сужение на внутренность абсолюта, следовательно, h-перемещение.

Теорема доказана.

Обозначим теперь на том же рисунке 93 h-прямую MN через q. Тогда при h-симметрии относительно p лучи прямой q, имеющие вершиной точку X, отображаются друг на друга, и потому смежные углы при вершине X конгруэнтны. Это дает возможность определить

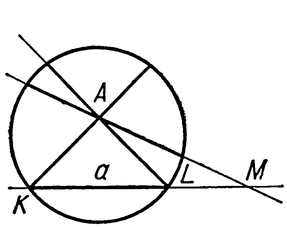

Рис. 92

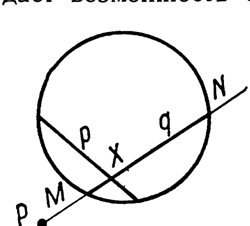

Рис. 93

перпендикулярность на плоскости Лобачевского: две h-прямые *перпендикулярны*, если полюс каждой из содержащих их проективных прямых лежит на другой прямой.

Теорема 3. *Пусть A и B — две h-точки, K и L — точки пересечения прямой AB с абсолютом. Тогда величина*

$$\rho(A, B) = c\,|\ln(KLAB)|,$$

где $c > 0$ — коэффициент пропорциональности, обладает следующими свойствами:

1) *если $A \neq B$, то $\rho(A, B) > 0$; если $A = B$, то $\rho(A, B) = 0$;*

2) *если отрезки AB и CD h-конгруэнтны, то*

$$\rho(A, B) = \rho(C, D);$$

3) *если точка B лежит между A и C, то*

$$\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C);$$

4) *каковы бы ни были две точки P и Q, существует такое значение c, что*

$$\rho(P, Q) = 1.$$

Величина $\rho(A, B)$ называется *расстоянием* между A и B.

Доказательство. Прежде всего отметим, что величина $\rho(A, B)$ существует, так как в силу неразделенности пар A, B и K, L будет $(KLAB) > 0$.

Выполнение первого и четвертого требований очевидно, выполнение второго вытекает из инвариантности двойного отношения при коллинеациях. Докажем третье свойство.

На основании формулы (3.4) имеем:

$$(KLAC) = (KLAB) \cdot (KLBC)$$

и, следовательно,

$$\ln(KLAC) = \ln(KLAB) + \ln(KLBC).$$

Из двух взаимнообратных чисел $(KLAC)$ и $(KLCA)$ одно больше единицы. Предположим, что обозначения выбраны так, что $(KLAC) > 1$. В этом случае можно показать (мы пропускаем соответствующую выкладку), что для любой точки B, лежащей между A и C, $(KLAB) > 1$ и $(KLBC) > 1$. Все три логарифма в последнем равенстве положительны, и потому можно записать, что

$$|\ln(KLAC)| = |\ln(KLAB)| + |\ln(KLBC)|.$$

Это равносильно равенству

$$\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C),$$

что и требовалось доказать.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПРОЕКТИВНЫХ ПРОСТРАНСТВ

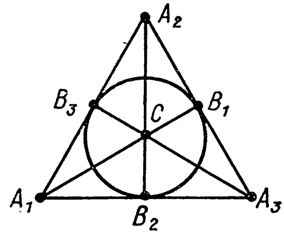

Рис. 94

В настоящем пособии при определении проективной прямой и проективной плоскости мы исходили из евклидовой геометрии, хотя это и приводило к некоторым неудобствам.

Определяя проективную плоскость через связку прямых и плоскостей евклидова пространства, мы должны были делать оговорку о том, что в связке принимается во внимание только отношение инцидентности. Такие понятия, как «перпендикулярность», «конгруэнтность углов», «биссектриса» и др., имеющие смысл в евклидовой геометрии, на проективную плоскость не переносились. Следовательно, вместо евклидова пространства R_3 в определении можно было ограничиться аффинным A_3, отличающимся от евклидова только тем, что в нем отсутствует понятие скалярного произведения векторов.

Множество векторов пространства A_3 представляет собой, как известно, линейное пространство V_3. Направляющие векторы прямой, входящей в связку, если к ним добавить нулевой вектор, образуют одномерное подпространство в V_3; множество направляющих векторов плоскости связки — двумерное подпространство. Поэтому в определении проективной плоскости вместо связки аффинного пространства можно взять систему подпространств линейного пространства V_3.

Для того чтобы иметь возможность дать общее определение проективного пространства, необходимо включить в рассмотрение проективные пространства любой размерности над произвольным полем F.

Пусть P_n — множество, состоящее из элементов n родов, называемых k-мерными плоскостями, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$, причем плоскости разных размерностей связаны отношением, называемым инцидентностью (т. е. для каждых двух таких плоскостей известно, инцидентны они или нет), и пусть E — множество всех подпространств $(n + 1)$-мерного линейного пространства над полем F. Если существует биективное отображение $g : P_n \to E$, при котором каждая k-мерная плоскость отображается на $(k + 1)$-мерное подпространство, а инцидентные плоскости (и только они) отображаются на подпространства, включающие друг друга, то P_n называется *n-мерным проективным пространством над полем F*.

Для иллюстрации зависимости свойств проективного пространства над полем от свойств поля рассмотрим проективную плоскость над полем, характеристика которого равна двум. Это поле состоит из двух элементов 0 и 1; операции сложения и умножения определяются следующими таблицами:

$$0 + 0 = 0,\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1,\ 1 + 1 = 0;$$

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

В соответствии с определением рассмотрим сначала линейное пространство над этим полем. Так как из элементов поля можно составить ровно восемь различных троек, то пространство состоит из восьми векторов:

$$\vec{0} = (0, 0, 0),\ \vec{a}_1 = (1, 0, 0),\ \vec{a}_2 = (0, 1, 0),\ \vec{a}_3 = (0, 0, 1),$$

$$\vec{c} = (1, 1, 1),\ \vec{b}_1 = (0, 1, 1),\ \vec{b}_2 = (1, 0, 1),\ \vec{b}_3 = (1, 1, 0).$$

Мы видим, что каждое одномерное подпространство содержит лишь один ненулевой вектор. Всего, таким образом, будет семь одномерных подпространств и, следовательно, семь точек на проективной плоскости, которые мы обозначим соответственно векторам: $A_1, A_2, A_3, C, B_1, B_2, B_3$.

Рассмотрим двумерное подпространство, натянутое на векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$. В это подпространство войдет еще только один ненулевой вектор — $\vec{b}_3$. Поэтому точки A_1, A_2, B_2 образуют прямую. Всего получается семь прямых:

$$\{A_1, A_2, B_3\},\ \{A_1, B_2, A_3\},\ \{B_1, A_2, A_3\},\ \{B_1, B_2, B_3\},$$

$$\{A_1, B_1, C\},\ \{A_2, B_2, C\},\ \{A_3, B_3, C\}.$$

На рисунке 94 точки изображены темными кружочками, а прямые — линиями.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. М., 1968.
Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия. М., 1976, ч. II.
Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. М., 1975, ч. II.
Вольберг О. А. Основные идеи проективной геометрии. М.—Л., 1949.
Гуревич Г. Б. Проективная геометрия. М., 1960.
Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М., 1978.
Сборник задач по геометрии. /Под ред. Л. С. Атанасяна. М., 1975, ч. II.
Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. М., 1970.
Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., 1953.
Юнг Дж. В. Проективная геометрия. М., 1949.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПРЯМОЙ

Глава II

ПОНЯТИЕ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Глава III

ПРОСТЕЙШИЕ ФАКТЫ ГЕОМЕТРИИ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Глава IV

ПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Самуил Лейбович ПЕВЗНЕР

ПРОЕКТИВНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *М. М. Широкова*
Корректор *Н. В. Бурдина*

Сдано в набор 02.11.79. Подписано к печати 22.05.08. $60\times90^1/_{16}$. Бумага типограф. № 2. Литер. гарн. Высокая печать. Условн. печ. л. 8. Уч.-изд. л. 7,82. Тираж 27.000 экз. Заказ № 247. Цена 25 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

25 коп.